斜め回転体の体積の求め方を 2 つ

問題

放物線 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を, 直線 $y=x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

解法１

解法のポイント

1. 回転軸の傾きが45° $(y=x)$ だから, 直角二等辺三角形の性質を利用して要領よく処理する。

2. 回転軸上の位置を t とし，回転半径を $r(t)$ で表すと， $\alpha \leq t \leq \beta$ のとき $V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\{r(t)\}^2dt$

   ここで，$r(t)=v(x)$，$t=u(x)$，また，$t=u(x)$ から $t=\alpha \Rightarrow x=p,\ t=\beta \Rightarrow x=q$ とすると，

   $V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\{r(t)\}^2dt=\pi\int_{p}^{q}\{v(x)\}^2\{u(x)\}'dx$

解

$y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$ と $y=x$ の交点は，連立方程式 $\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x \\ y=x \end{cases}$ の解より，$(x,\ y)=(0,\ 0),\ \left(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$

したがって，点 $\mathrm{P}\left(x,\ \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x\right)$ から $y=x$ に下ろした垂線の足を H， $\mathrm{OH}=t$ とすると，

$0\leq t\leq 4$ より， $V=\pi\int_0^4\mathrm{PH}^2dt$ ・・・①

ここで，点 $\mathrm{Q}(x,\ x)$ とすると，

△PHQ は∠H＝90° の直角二等辺三角形だから， $\mathrm{PH}=\dfrac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{2}}=\dfrac{x-\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x\right)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}x-\dfrac{x^2}{2}$

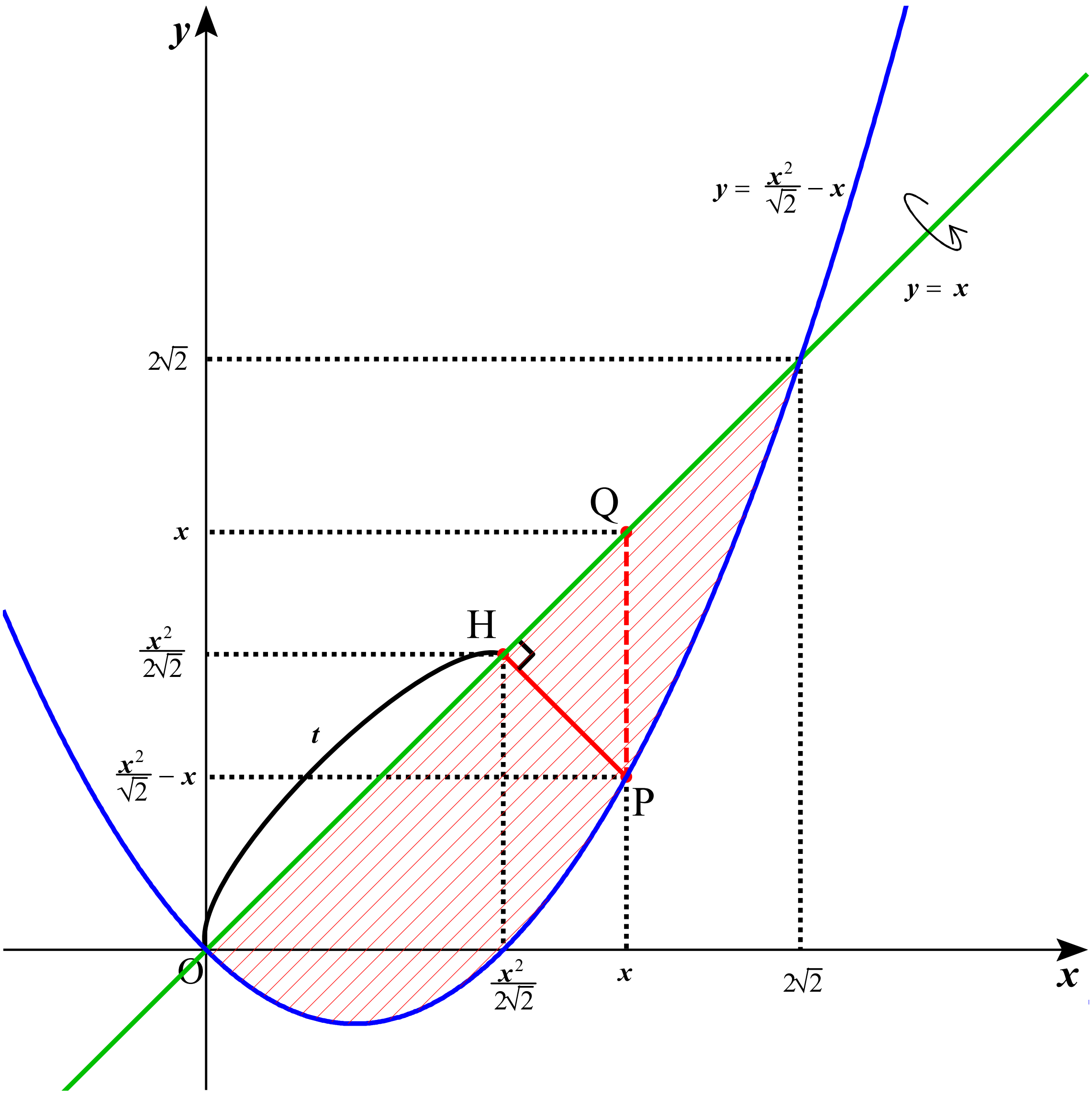
また，H の x 座標は， $x-\dfrac{\mathrm{PH}}{\sqrt{2}}$ より， $\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}$ $\therefore\ \mathrm{OH}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{x^2}{2}$

これと $\mathrm{OH}=t$ から， $t=\dfrac{x^2}{2}$ $\therefore\ dt=xdx$ ・・・②

また， $t=4\Rightarrow x=2\sqrt{2},\ t=0\Rightarrow x=0$ ・・・③

よって，①，②，③より，

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^4\mathrm{PH}^2dt\\
&=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}x-\frac{x^2}{2}\right)^2xdx\\
&=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(2x^3-\sqrt{2}x^4+\frac{x^5}{4}\right)dx\\
&=\pi\left[\frac{x^4}{2}-\frac{\sqrt{2}}{5}x^5+\frac{x^6}{24}\right]_0^{2\sqrt{2}}\\
&=\frac{32}{15}\pi
\end{aligned}$$



y
x
O
$y = \frac{x^2}{\sqrt{2}} - x$
$y = x$
$2\sqrt{2}$
x
$\frac{x^2}{2\sqrt{2}}$
$\frac{x^2}{\sqrt{2}} - x$
Q
H
P
t
$\frac{x^2}{2\sqrt{2}}$
x
$2\sqrt{2}$

解法 2

解法のポイント

曲線と直線を$-\dfrac{\pi}{4}$回転移動すると，直線$y=x$はx軸に移動する。

また，移動後の曲線を媒介変数tを用いて$(x,\ y)=(v(t),\ u(t))$で表されたとすると，
求める体積は曲線$(x,\ y)=(v(t),\ u(t))$をx軸の周りに 1 回転してできる立体の体積と等しい。

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}y^2dx=\pi\int_{p}^{q}\{u(t)\}^2v'(t)dt$$

回転移動の原理

原点を O とするxy直交座標平面上の任意の点を P$(x,\ y)$， OP$=r$ $\left(r=\sqrt{x^2+y^2}\right)$，

OP とx軸正方向とのなす角をαとすると， $(x,\ y)=(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$
よって， 点 P を O のまわりにθ回転移動した点を Q$(X,\ Y)$とすると，

$$\begin{aligned}(X,\ Y)&=(r\cos(\alpha+\theta),\ r\sin(\alpha+\theta))\\&=(r\cos\alpha\cos\theta-r\sin\alpha\sin\theta,\ r\sin\alpha\cos\theta+r\cos\alpha\sin\theta)\\&=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ y\cos\theta+x\sin\theta)\\&=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)\end{aligned}$$

解

$y=x$を原点のまわりに$-\dfrac{\pi}{4}$回転移動すると， $y=0$ （x軸） ・・・① となる。

また， $(x,\ y)$を原点のまわりに$-\dfrac{\pi}{4}$回転移動した点を$(X,\ Y)$とすると，

$$\begin{aligned}X&=x\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-y\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y&=x\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+y\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\&=-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

だから，

$y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$上の点$\left(t,\ \dfrac{t^2}{\sqrt{2}}-t\right)$を原点のまわりに$-\dfrac{\pi}{4}$回転移動した点は

$$\left(\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t^2}{\sqrt{2}}-t\right),\ -\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t^2}{\sqrt{2}}-t\right)\right)=\left(\frac{t^2}{2},\ \frac{t^2}{2}-\sqrt{2}t\right)$$ となる。

したがって，$y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$ を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転移動した曲線の媒介変数表示は

$x=\dfrac{t^2}{2},\ y=\dfrac{t^2}{2}-\sqrt{2}t$　・・・②

①，②より，曲線②と x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積も V となるから，この体積を求めればよい。

ここで，②について，$y=\dfrac{t^2}{2}-\sqrt{2}t=\dfrac{t}{2}\left(t-2\sqrt{2}\right)$ より，$0\le t\le 2\sqrt{2}$ のとき $y\le 0$，

$t=0\Rightarrow x=0,\ t=2\sqrt{2}\Rightarrow x=4$，　$dx=tdt$ だから，

求める体積は

$$
\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^4 y^2dx\\
&=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\frac{t^2}{2}-\sqrt{2}t\right)^2tdt\\
&=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\frac{t^5}{4}-\sqrt{2}t^4+2t^3\right)dt\\
&=\pi\left[\frac{t^6}{24}-\frac{\sqrt{2}}{5}t^5+\frac{t^4}{2}\right]_0^{2\sqrt{2}}\\
&=\frac{32}{15}\pi
\end{aligned}
$$

補足：$y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$ を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転移動した曲線の式を $x,\ y$ で表してみる。

回転移動の原理（http://www.toitemita.sakura.ne.jp/4step/n4step3-8-1.pdf　**20** ページ参照）

原点を O とする xy 直交座標平面上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，

OP と x 軸正方向とのなす角を，反時計回りを正とし，α とすると，

$(x,\ y)=(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$

したがって，点 P を O のまわりに θ 回転移動した点を点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
(X,\ Y)&=(r\cos(\alpha+\theta),\ r\sin(\alpha+\theta))\\
&=(r\cos\alpha\cos\theta-r\sin\alpha\sin\theta,\ r\sin\alpha\cos\theta+r\cos\alpha\sin\theta)\\
&=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ y\cos\theta+x\sin\theta)\\
&=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)
\end{aligned}
$$

点 P は点 Q を O のまわりに $-\theta$ 回転移動した点だから，

これより，$(x,\ y)=(X\cos\theta+Y\sin\theta,\ -X\sin\theta+Y\cos\theta)$

点 P は点 Q を O のまわりに $-\theta$ 回転移動した点だから，

これより，$(x,\ y)=(X\cos\theta+Y\sin\theta,\ -X\sin\theta+Y\cos\theta)$

$\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ より，$(x,\ y)=\left(\dfrac{X}{\sqrt{2}}-\dfrac{Y}{\sqrt{2}},\ \dfrac{X}{\sqrt{2}}+\dfrac{Y}{\sqrt{2}}\right)$

これと $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$ より，$\dfrac{X}{\sqrt{2}}+\dfrac{Y}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{X}{\sqrt{2}}-\dfrac{Y}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\dfrac{X}{\sqrt{2}}-\dfrac{Y}{\sqrt{2}}\right)$

これを整理し，$X,\ Y$ をそれぞれ $x,\ y$ に書き替えると，$(x-y)^2-4x=0$ となる。

また，これより，$y=x\pm2\sqrt{x}$ が得られるから，

これと x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めてもよい。

しかし，媒介変数曲線で扱うほうが楽に求積できるので，この求積は省略した。