

## 2 次曲線

### 2 次曲線とは

2 変数の 2 次方程式  $ax^2 + hxy + by^2 + cx + dy + e = 0$

( $x, y$  は変数, 他の文字は定数で, そのうち  $a, b, h$  の少なくとも 1 つは 0 でない)

によって表される平面図形の総称。

たとえば,

$$a = b \neq 0, \quad h = 0 \text{ ならば円の方程式 } x^2 + y^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}y + \frac{e}{a} = 0$$

$$a \neq 0, \quad d \neq 0 \quad b = h = 0 \text{ ならば放物線の方程式 } y = -\frac{a}{d}x^2 - \frac{c}{d}x - \frac{e}{d}$$

となる。

また,  $(px + qy + r)(sx + ty + u) = 0$  と因数分解できるならば 2 直線を表す式となる。

### 2 次曲線 (放物線・楕円・双曲線) の分類と定義

2 次曲線の分類と定義を  $ax^2 + hxy + by^2 + cx + dy + e = 0$  から行うより,

図形的特徴から行う方が視覚的に理解しやすいのは明らかであり,

定義については,

「焦点」や「準線」を用いて, 放物線・楕円・双曲線それぞれを別々に定義する方法と

「離心率」を用いて, 放物線・楕円・双曲線を統一的に定義する方法がある。

2 次曲線の方程式についても

$xy$  直交座標を用いて, 放物線, 楕円, 双曲線それぞれを別々の方程式で表す方法と

極座標を用いて, 放物線, 楕円, 双曲線を同じ極方程式で統一して表す方法がある。

では, 以上順を追って解説していきます。

- A. 放物線
- B. だ円
- C. 双曲線
- D. 3 曲線の方程式の離心率による統一
- E. 2 次曲線の極方程式

## A. 放物線

### A-1. 放物線の図形的定義

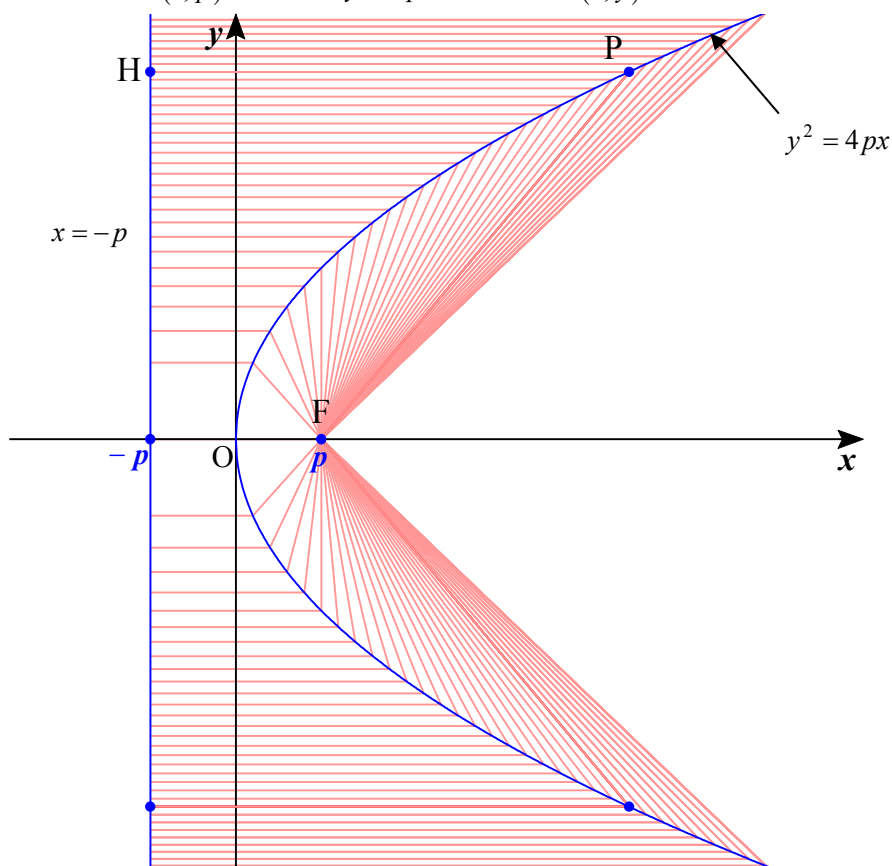
定点  $F$ , 定直線  $l$  から等距離ある点が描く軌跡

定点  $F$  を「放物線の焦点」という。

### A-2. 放物線の標準形

焦点  $F(p, 0)$ , 準線  $l: x = -p$  とすると,  $P(x, y)$  の軌跡, すなわち放物線は  $y^2 = 4px$

同様に, 焦点  $F(0, p)$ , 準線  $l: y = -p$  とすると,  $P(x, y)$  の軌跡, すなわち放物線は  $x^2 = 4py$



#### 解説

焦点  $(p, 0)$  からの距離と準線  $x = q$  ( $p \neq q$ ) からの距離が等しい動点を  $P(x, y)$  とすると,

動点  $P$  の軌跡は,  $\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x-q|$  より,  $(x-p)^2 + y^2 = (x-q)^2$ ,

すなわち  $y^2 = 2(p-q)x + (q-p)(q+p)$

とくに,  $q+p=0$ , すなわち  $q=-p$  のとき,  $y^2 = 4px$

これより, 焦点を  $(p, 0)$ , 準線を  $x = -p$  とする放物線の方程式は  $y^2 = 4px$

## A-3. 放物線の接線の方程式の求め方

接線の方程式の求め方には、

$y = mx + n$  とおいて始める方法と接点の座標を  $(x_1, y_1)$  とおいて始める方法がある。

1.  $y = mx + n$  とおいて求めた接線の方程式

$$y^2 = 4px \text{ の接線 : } y = mx + \frac{p}{m} \quad x^2 = 4py \text{ の接線 : } y = mx - pm^2$$

求め方

放物線  $y^2 = 4px$  の接線の方程式を  $y = mx + n$  とすると、

接点の  $x$  座標は  $(mx + n)^2 = 4px$ , すなわち  $m^2x^2 + 2(mn - 2p)x + n^2 = 0$  の重解である。

よって、判別式を  $D$  とすると、 $\frac{D}{4} = (mn - 2p)^2 - m^2n^2 = 0$  より、 $4p(p - mn) = 0$

これと  $p \neq 0$  より、 $n = \frac{p}{m}$

ゆえに、接線の方程式は  $y = mx + \frac{p}{m}$

同様に、放物線  $x^2 = 4py$  の接線を  $y = mx + n$  とすると、

共有点の  $x$  座標は  $x^2 = 4p(mx + n)$ , すなわち  $x^2 - 4pmx - 4pn = 0$  の重解である。

よって、判別式を  $D$  とすると、 $\frac{D}{4} = 4p^2m^2 + 4pn = 0$  より、 $4p(pm^2 + n) = 0$

これと  $p \neq 0$  より、 $n = -pm^2$

ゆえに、接線の方程式は  $y = mx - pm^2$

2. 接点を  $(x_1, y_1)$  とおいて求めた接線の方程式

$$y^2 = 4px \text{ の接線 : } y_1y = 2p(x + x_1) \quad x^2 = 4py \text{ の接線 : } x_1x = 2p(y + y_1)$$

求め方

方法 1: 重解と解と係数の関係を用いる

$y^2 = 4px$  上の原点でない点  $(x_1, y_1)$  の接線の傾きを  $m$  とすると、

接線の方程式は  $y = m(x - x_1) + y_1$  だから、接点の  $x$  座標  $x_1$  を求める方程式は、

$$\{m(x - x_1) + y_1\}^2 = 4px, \text{ すなわち } m^2x^2 - 2(m^2x_1 - my_1 + 2p)x + (mx_1 - y_1)^2 = 0$$

$x = x_1$  はこの方程式の重解だから、解と係数の関係より、 $x_1 + x_1 = \frac{2(m^2x_1 - my_1 + 2p)}{m^2}$

$$\text{すなわち } x_1 = \frac{m^2x_1 - my_1 + 2p}{m^2} \quad \therefore m = \frac{2p}{y_1}$$

これを  $y = m(x - x_1) + y_1$  に代入し、整理すると  $y_1y = 2p(x - x_1) + y_1^2$

これと  $y_1^2 = 4px_1$  より、 $y_1y = 2p(x + x_1)$

## 方法2：極限を使う

$y^2 = 4px$  上の2点  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$  を通る直線の傾きを  $m$  とすると,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{4p} - \frac{y_1^2}{4p}} = \frac{4p}{y_2 + y_1} \quad (\because y_1^2 = 4px_1, y_2^2 = 4px_2)$$

$$\left( \text{または, } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{y_2 + y_1} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{y_2 + y_1} = \frac{4px_2 - 4px_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{y_2 + y_1} = \frac{4p}{y_2 + y_1} \right)$$

$Q(x_2, y_2) \rightarrow P(x_1, y_1)$  のときの  $m$  の極限は  $P(x_1, y_1)$  における接線の傾きだから,

$$P(x_1, y_1) \text{ における接線の傾き} = \lim_{Q \rightarrow P} m = \lim_{y_2 \rightarrow y_1} \frac{4p}{y_2 + y_1} = \frac{2p}{y_1}$$

よって,  $P(x_1, y_1)$  における接線の式は,  $y = \frac{2p}{y_1}(x - x_1) + y_1$

これと  $y_1^2 = 4px_1$  より,  $y_1 y = 2p(x + x_1)$

## 方法3：微分を使う

$$y^2 = 4px \text{ より, } 2y \frac{dy}{dx} = 4p \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}$$

ゆえに,  $y^2 = 4px$  上の点  $(x_1, y_1)$  における接線の式は  $y = \frac{2p}{y_1}(x - x_1) + y_1$

これと  $y_1^2 = 4px_1$  より,  $y_1 y = 2p(x + x_1)$

## コメント

方法3が最も楽ですが, 簡単に導けるということが逆に仇となることもあるので, 方法1や方法2による証明方法も是非ともマスターしてください。

## A-4. 放物線の焦点 F とは？

放物線の軸と平行に放物線に入射した任意の光線の反射光は定点 F を通る。  
つまり、定点 F に集光する。

## 解説

焦点  $F(0, p)$  と準線  $y = -p$  で定義される放物線  $x^2 = 4py$  ( $p > 0$ ) を例に示す。

$x^2 = 4py$  ( $p > 0$ ) を  $y = \frac{x^2}{4p}$  ( $p > 0$ ) に変形し、

$y = \frac{x^2}{4p}$  上の任意の点  $P\left(t, \frac{t^2}{4p}\right)$  における接線と平行で焦点  $F(0, p)$  を通る直線を  $l$  とする。

$y' = \frac{x}{2p}$  より、点  $P$  の接線の傾き  $= \frac{t}{2p}$

よって、直線  $l$  の方程式は  $y = \frac{t}{2p}x + p$

次に、放物線の軸、すなわち  $y$  軸と平行に点  $P$  に入射する光線を  $x = t$  とし、  
この光線と直線  $l$  との交点を  $A$  とすると、

$A\left(t, \frac{t^2}{2p} + p\right)$  より、 $PA = \frac{t^2}{2p} + p - \frac{t^2}{4p} = \frac{t^2}{4p} + p$

一方、 $PF = \sqrt{t^2 + \left(p - \frac{t^2}{4p}\right)^2} = \frac{t^2}{4p} + p$

よって、 $\triangle PAF$  は  $PA = PF$  の二等辺三角形である。

したがって、点  $P$  から直線  $l$  に下ろした垂線の足を  $H$  とすると、

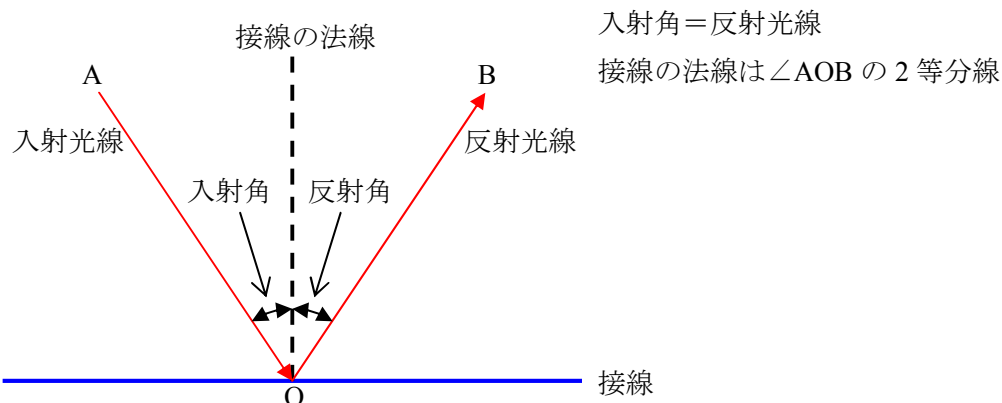
二等辺三角形の性質より、 $\triangle PAH \equiv \triangle PFH$

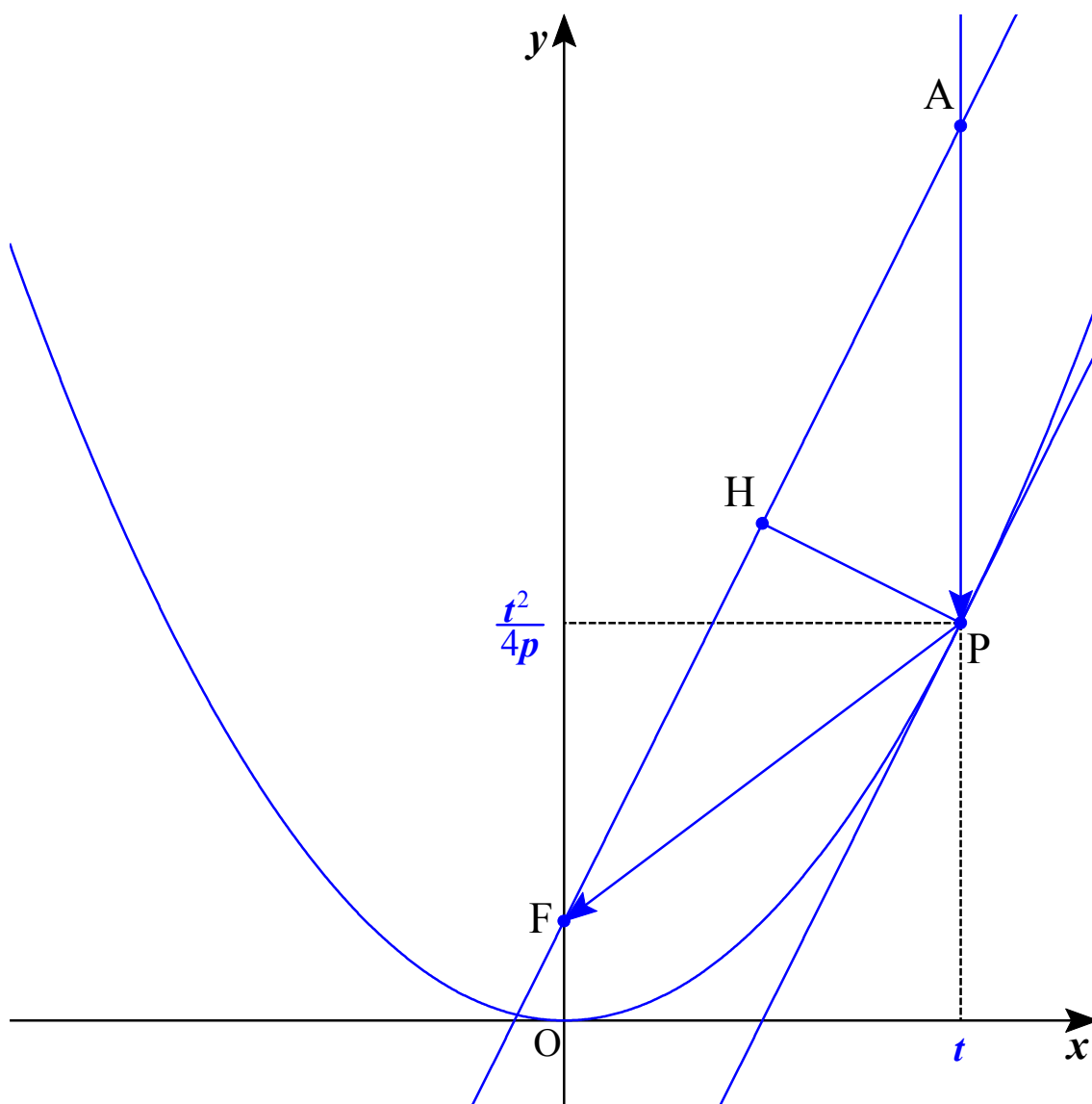
これより、 $\angle APH = \angle FPH$

これと、直線  $l$  は点  $P$  の接線と平行だから、 $PH$  は点  $P$  の接線とも垂直であることから、  
 $\angle APH$  と  $\angle FPH$  は放物線上の点  $P$  の入射角と反射角の関係にある。

よって、放物線の軸に平行な光線が放物線上で反射されて集まる点が  $F(0, p)$  である。

## 補足 入射角と反射角



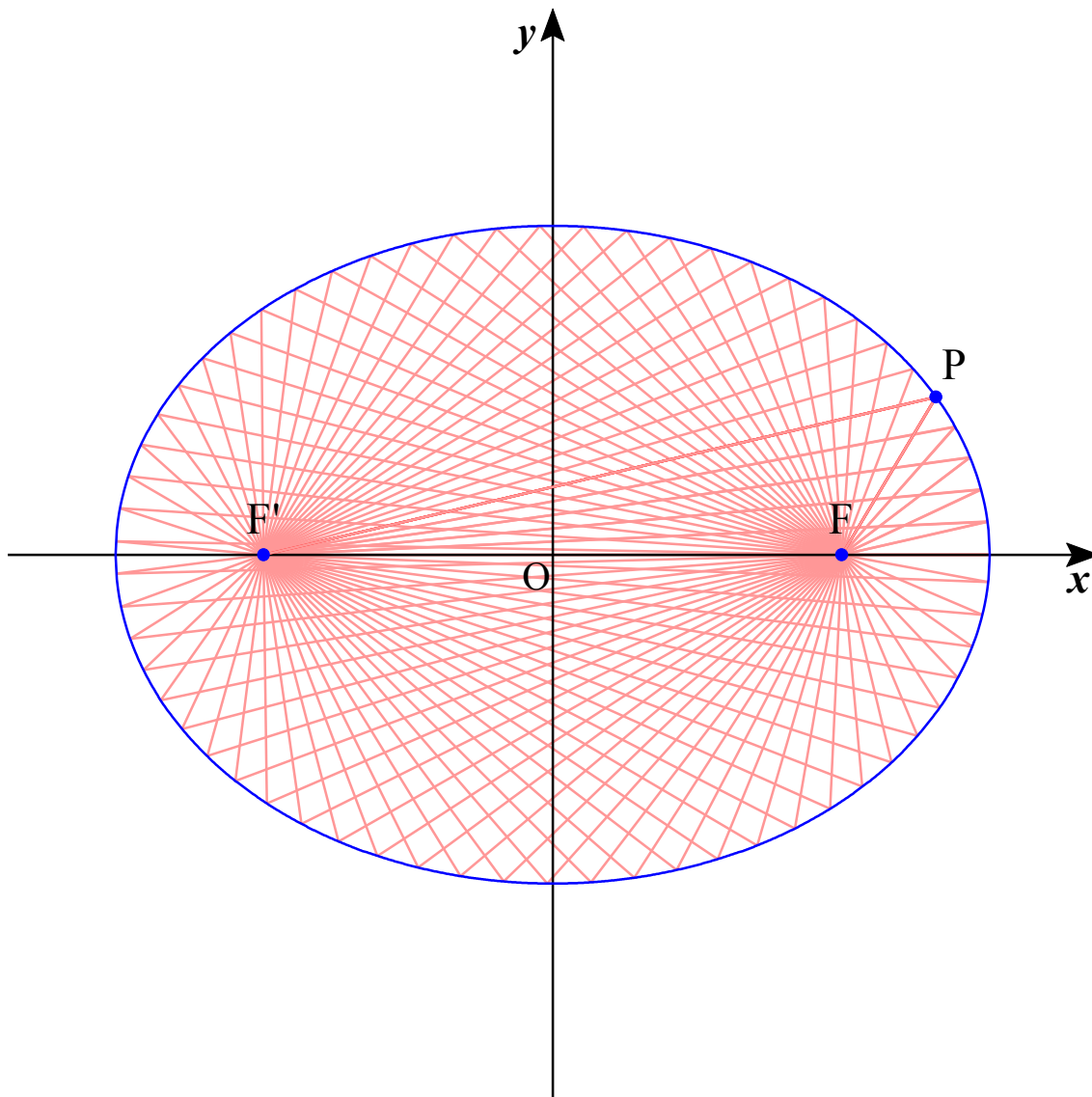


## B. 楕円：円が圧縮され、中心が2つに分裂した図形

### B-1. 楕円の図形的定義

2 定点からの距離の和が一定な点が描く軌跡

また、2 定点を「楕円の焦点」という。



**B-2. 楕円の標準形****焦点が  $x$  軸上にある楕円**

2つの焦点を  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ ) とすると,

$F$ ,  $F'$  からの距離の和が  $2a$  となる点  $P$ ,

すなわち  $PF + PF' = 2a$  ( $a > 0$ ) を満たす点  $P(x, y)$  が描く軌跡は,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = a^2 - c^2, b > 0)$$

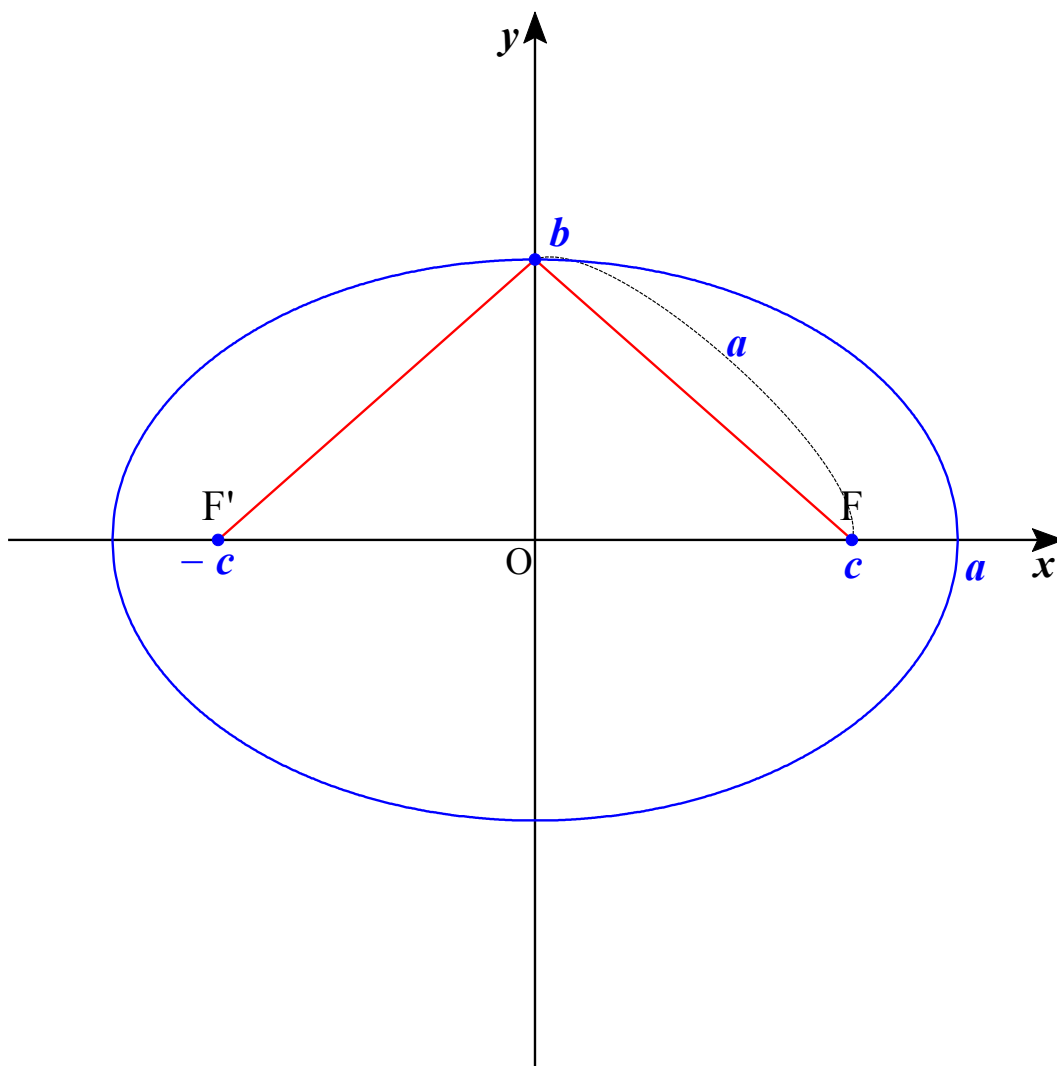
**焦点が  $y$  軸上にある楕円**

2つの焦点を  $F(0, c)$ ,  $F'(0, -c)$  ( $c > 0$ ) とすると,

$F$ ,  $F'$  からの距離の和が  $2b$  となる点  $P$ ,

すなわち  $PF + PF' = 2b$  ( $b > 0$ ) を満たす点  $P(x, y)$  が描く軌跡は,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 = b^2 - c^2, a > 0)$$





以降は、焦点が  $x$  軸上にある楕円の場合について解説する。

標準系の導き方

方法 1

$$PF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad PF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ より,}$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad \therefore \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\text{両辺を 2 乗すると, } (x+c)^2 + y^2 = \left\{ 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right\}^2$$

$$\therefore (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\text{両辺を整理すると, } cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\text{両辺を 2 乗すると, } c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\therefore (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\text{両辺を } a^2(a^2 - c^2) \text{ で割ると, } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$\text{ここで, } a^2 - c^2 = b^2 \text{ とおくと, } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$P, F, F'$  は異なる 3 点だから,  $\triangle PFF'$  が成立する。

したがって, 三角形の成立条件  $FF' (= 2c) < PF + PF' (= 2a)$  を満たす。

$$\text{よって, } a^2 - c^2 = b^2 > 0$$

ここで, 便宜上  $b > 0$  とおけば, 標準形が得られる。

## 方法 2

$$PF + PF' = 2a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$PF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$PF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$PF^2 - PF'^2 = (PF + PF')(PF - PF') \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \sim \textcircled{4} \text{より, } (x-c)^2 + y^2 - \{(x+c)^2 + y^2\} = 2a(PF - PF') \quad \therefore PF - PF' = -\frac{2c}{a}x \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} \text{と} \textcircled{5} \text{より, } PF = a - \frac{c}{a}x$$

$$\text{これと} \textcircled{2} \text{より, } \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

$$\text{両辺を 2 乗すると, } (x-c)^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \quad \therefore \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

$$\text{両辺を } a^2 - c^2 \text{ で割ると, } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$a^2 - c^2 = b^2 \text{ とおくと, } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

P, F, F' は異なる 3 点だから,  $\triangle PFF'$  が成立する。

したがって, 三角形の成立条件,  $FF' (= 2c) < PF + PF' (= 2a)$  を満たす。

よって,  $a^2 - c^2 = b^2 > 0$

ここで, 便宜上  $b > 0$  とおけば, 標準形が得られる。

**B-3. 楕円と円の関係**

## 円と楕円の関係

$x^2 + y^2 = 1$  の点  $(x, y)$  を  $x$  方向に  $a$  倍,  $y$  方向に  $b$  倍した点を  $(X, Y)$  とすると,

$$X = ax, Y = by \text{ より, } x = \frac{X}{a}, y = \frac{Y}{b}$$

よって,  $x^2 + y^2 = 1$  を  $x$  方向に  $a$  倍,  $y$  方向に  $b$  倍に拡大した図形の方程式は,

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

$X, Y$  を  $x, y$  に書き改めると, 楕円の方程式  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  が得られる。

また, 面積は円  $x^2 + y^2 = 1$  の  $ab$  倍になるから,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  の面積  $= \pi ab$

## 補足

あるいは, 円を  $x^2 + y^2 = a^2$  とし, この円を  $y$  方向に  $\frac{b}{a}$  倍すると,

$$X = x, Y = \frac{b}{a}y \text{ より, } X^2 + \frac{a^2}{b^2}Y^2 = a^2 \quad \therefore \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

## 円の接線と楕円の接線の関係

円と楕円の関係から楕円の接線の方程式を微分を使わなくとも楽に導ける。

多少説明が粗くなるが,

$x^2 + y^2 = 1$  上の点  $(x_0, y_0)$  における接線の方程式は  $x_0x + y_0y = 1$

楕円と円の関係より,  $(x_0, y_0)$  に対応する楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上の点は  $\left(\frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}\right)$

これと  $x = \frac{X}{a}, y = \frac{Y}{b}$  より,  $\frac{x_0}{a} \cdot \frac{X}{a} + \frac{y_0}{b} \cdot \frac{Y}{b} = 1$

$X, Y$  を  $x, y$  に書き改めると,  $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$  となる。

## 円のパラメータ表示と楕円のパラメータ表示の関係

楕円と円の関係より,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  は  $x^2 + y^2 = 1$  上の点  $(x, y)$  を  $x$  方向に  $a$  倍,  $y$  方向に  $b$  倍した点の軌跡である。

また,  $x^2 + y^2 = 1$  のパラメータ表示は  $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$  である。

よって,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  のパラメータ表示は  $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$  となる。

**B-4. 楕円の接線の方程式の求め方**

$y = mx + n$  において始める方法と接点の座標を  $(x_1, y_1)$  において始める方法がある。

**1.  $y = mx + n$  において求めた接線の方程式**

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ の接線 : } y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

求め方

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ の接線の式を } y = mx + n \text{ とすると,}$$

$$\text{接点の } x \text{ 座標は } \frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+n)^2}{b^2} = 1 \text{ の重解である。}$$

この両辺を  $a^2 b^2$  倍し,  $x$  について整理すると  $(a^2 m^2 + b^2)x^2 + 2a^2 mnx + a^2 n^2 - a^2 b^2 = 0$   
よって, 判別式を  $D$  とすると,  $D = 0$  より,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= a^4 m^2 n^2 - (a^2 m^2 + b^2)(a^2 n^2 - a^2 b^2) \\ &= a^2 \{ a^2 m^2 n^2 - (a^2 m^2 + b^2)(n^2 - b^2) \} \\ &= a^2 b^2 (a^2 m^2 - n^2 + b^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$a \neq 0, b \neq 0 \text{ より, } a^2 m^2 - n^2 + b^2 = 0 \quad \therefore n = \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

$$\text{ゆえに, } y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

補足:  $\frac{1}{a^2} = A, \frac{1}{b^2} = B$  と置き換えると処理が楽である。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ を } Ax^2 + By^2 = 1 \quad \left( A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2} \right), \text{ 接線の式を } y = mx + n \text{ とおくと,}$$

接点の  $x$  座標は  $Ax^2 + B(mx+n)^2 = 1$ , すなわち  $(A + Bm^2)x^2 + 2Bmnx + Bn^2 - 1 = 0$   
よって, 判別式を  $D$  とすると,  $D = 0$  より,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= B^2 m^2 n^2 - (A + Bm^2)(Bn^2 - 1) \\ &= -(ABn^2 - A - Bm^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore n = \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

$$\text{ゆえに, } y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

2. 接点を  $(x_1, y_1)$  とおいて求めた接線の方程式

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ の接線 : } \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

求め方

方法1: 重解と解と係数の関係を使う

$$Ax^2 + By^2 = 1 \quad \left( A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2} \right) \text{ 上の点 } (x_1, y_1) \text{ を接点とする接線の傾きを } m \text{ とすると,}$$

$$\text{その方程式 } y = m(x - x_1) + y_1$$

$$\text{よって, } x_1 \text{ は } Ax^2 + B\{m(x - x_1) + y_1\}^2 = 1,$$

$$\text{すなわち } (A + Bm^2)x^2 - 2(Bm^2x_1 - Bmy_1)x + B(m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 + y_1^2) - 1 = 0 \text{ の重解である。}$$

$$\text{よって, 解と係数の関係より, } x_1 + x_1 = \frac{2(Bm^2x_1 - Bmy_1)}{A + Bm^2} \quad \therefore m = -\frac{Ax_1}{By_1}$$

$$\text{これを } y = m(x - x_1) + y_1 \text{ に代入すると, } y = -\frac{Ax_1}{By_1}(x - x_1) + y_1$$

$$\text{両辺を } By_1 \text{ 倍し, 整理すると } Ax_1x + By_1y = Ax_1^2 + By_1^2$$

$$\text{これと } Ax_1^2 + By_1^2 = 1 \text{ より, } Ax_1x + By_1y = 1$$

$$A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2} \text{ より, 接線の方程式は } \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

方法2: 極限を使う

$$Ax^2 + By^2 = 1 \quad \left( A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2} \right) \text{ 上の 2 点}$$

$P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$  を通る直線の傾きを  $m$  とすると,

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{y_2 + y_1} \cdot \frac{x_2 + x_1}{x_2 + x_1} \\ &= \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また,  $Ax_1^2 + By_1^2 = 1$  と  $Ax_2^2 + By_2^2 = 1$  の両辺の差をとると,

$$A(x_2^2 - x_1^2) + B(y_2^2 - y_1^2) = 0 \quad \therefore \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = -\frac{A}{B} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } m = -\frac{A(x_2 + x_1)}{B(y_2 + y_1)}$$

$Q(x_2, y_2) \rightarrow P(x_1, y_1)$  のときの  $m$  の極限は  $P(x_1, y_1)$  における接線の傾きだから,

$$P(x_1, y_1) \text{ における接線の傾き} = \lim_{Q \rightarrow P} m = -\frac{Ax_1}{By_1}$$

よって、 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は  $y = -\frac{Ax_1}{By_1}(x - x_1) + y_1$

両辺を  $By_1$  倍し、整理すると、 $Ax_1x + By_1y = Ax_1^2 + By_1^2$

これと  $Ax_1^2 + By_1^2 = 1$  より、 $Ax_1x + By_1y = 1$

$A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2}$  より、接線の方程式は  $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

### 方法3：微分を使う

$Ax^2 + By^2 = 1$   $\left( A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2} \right)$  より、 $2Ax + 2By \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{Ax}{By}$

ゆえに、 $Ax^2 + By^2 = 1$ 上の点  $(x_1, y_1)$ における接線の方程式は  $y = -\frac{Ax_1}{By_1}(x - x_1) + y_1$

両辺を  $By_1$  倍し、整理すると  $Ax_1x + By_1y = Ax_1^2 + By_1^2$

これと  $Ax_1^2 + By_1^2 = 1$  より、 $Ax_1x + By_1y = 1$

$A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2}$  より、接線の方程式は  $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

**B-5. 楕円の焦点 F, F' とは**

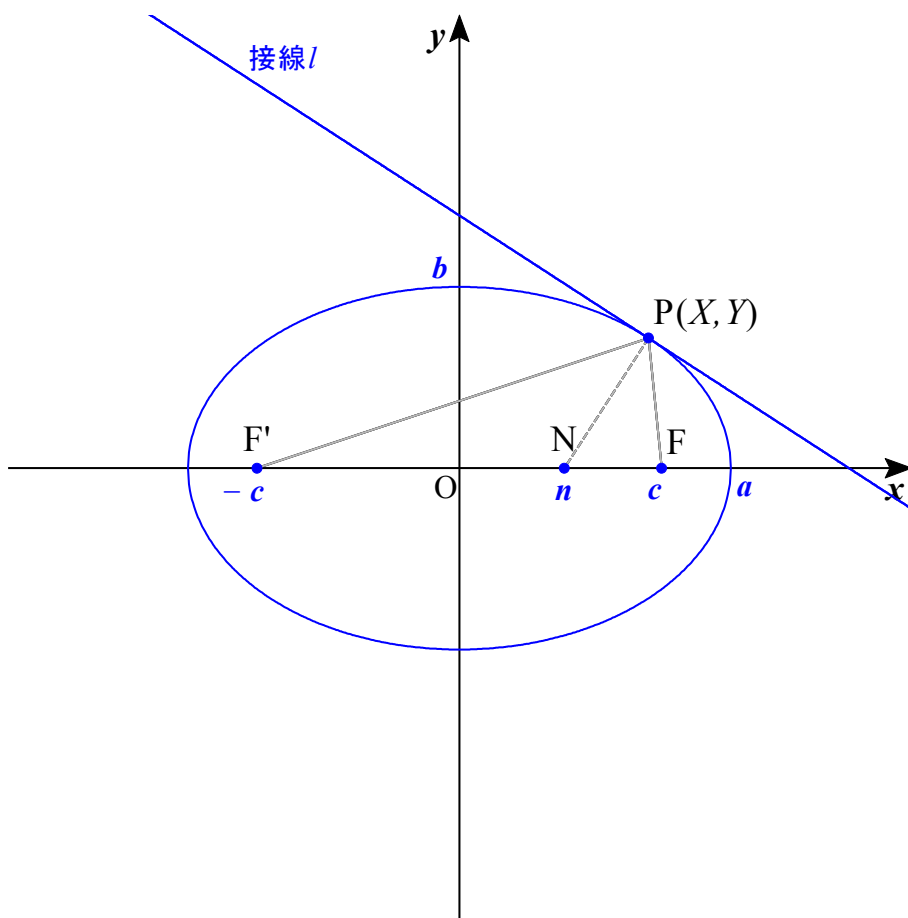
定点 F' (F) からの光が楕円曲線で反射すると, その反射光は F (F') を通る。

解説

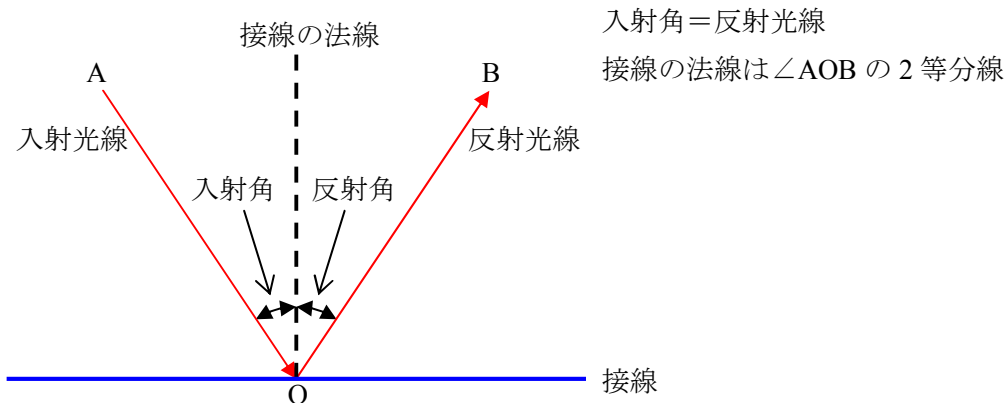
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0, a^2 = b^2 + c^2)$$

上に点  $P(X, Y)$  ( $X \neq 0, Y \neq 0$ ) をとり,

$\angle F'PF$  の 2 等分線と  $x$  軸との交点を  $N(n, 0)$  とすると, 直線  $PN$  が点  $P$  の接線  $l$  の法線であることを示せばよい。尚,  $(\pm a, 0), (0, \pm b)$  については明らかだから省略



補足 入射角と反射角



PN は  $\triangle PF'F$  の  $\angle P$  の 2 等分線だから、 $PF' : PF = NF' : NF \dots \textcircled{1}$

$$\text{ここで、 } PF'^2 = (X+c)^2 + Y^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\text{また、 } \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = b^2 + c^2 \text{ より、}$$

$$Y^2 = -\frac{b^2}{a^2}X^2 + b^2 = -\frac{a^2 - c^2}{a^2}X^2 + a^2 - c^2 = -\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)X^2 + a^2 - c^2 \dots \textcircled{3}$$

②, ③より、

$$PF'^2 = (X+c)^2 - \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)X^2 + a^2 - c^2 = \frac{c^2}{a^2}X^2 + 2cX + a^2 = \left(\frac{c}{a}X + a\right)^2$$

$$\text{よって、 } PF' = \frac{c}{a}X + a \quad (\because -a \leq X \leq a \text{ より、 } \frac{c}{a}X + a \geq 0) \dots \textcircled{4}$$

$$\text{同様に、 } PF = -\frac{c}{a}X + a \dots \textcircled{5}$$

$$\text{また、 } NF' = c + n \dots \textcircled{6}, \quad NF = c - n \dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{4} \sim \textcircled{7} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると、 } \frac{c}{a}X + a : -\frac{c}{a}X + a = c + n : c - n \text{ より、}$$

$$\left(-\frac{c}{a}X + a\right)(c + n) = \left(\frac{c}{a}X + a\right)(c - n) \quad \therefore n = \frac{c^2}{a^2}X$$

$$\text{したがって、 } N\left(\frac{c^2}{a^2}X, 0\right)$$

$$\text{よって、 } PN \text{ の傾き} = \frac{Y - 0}{X - \frac{c^2}{a^2}X} = \frac{a^2}{a^2 - c^2} \frac{Y}{X} = \frac{a^2}{b^2} \frac{Y}{X}$$

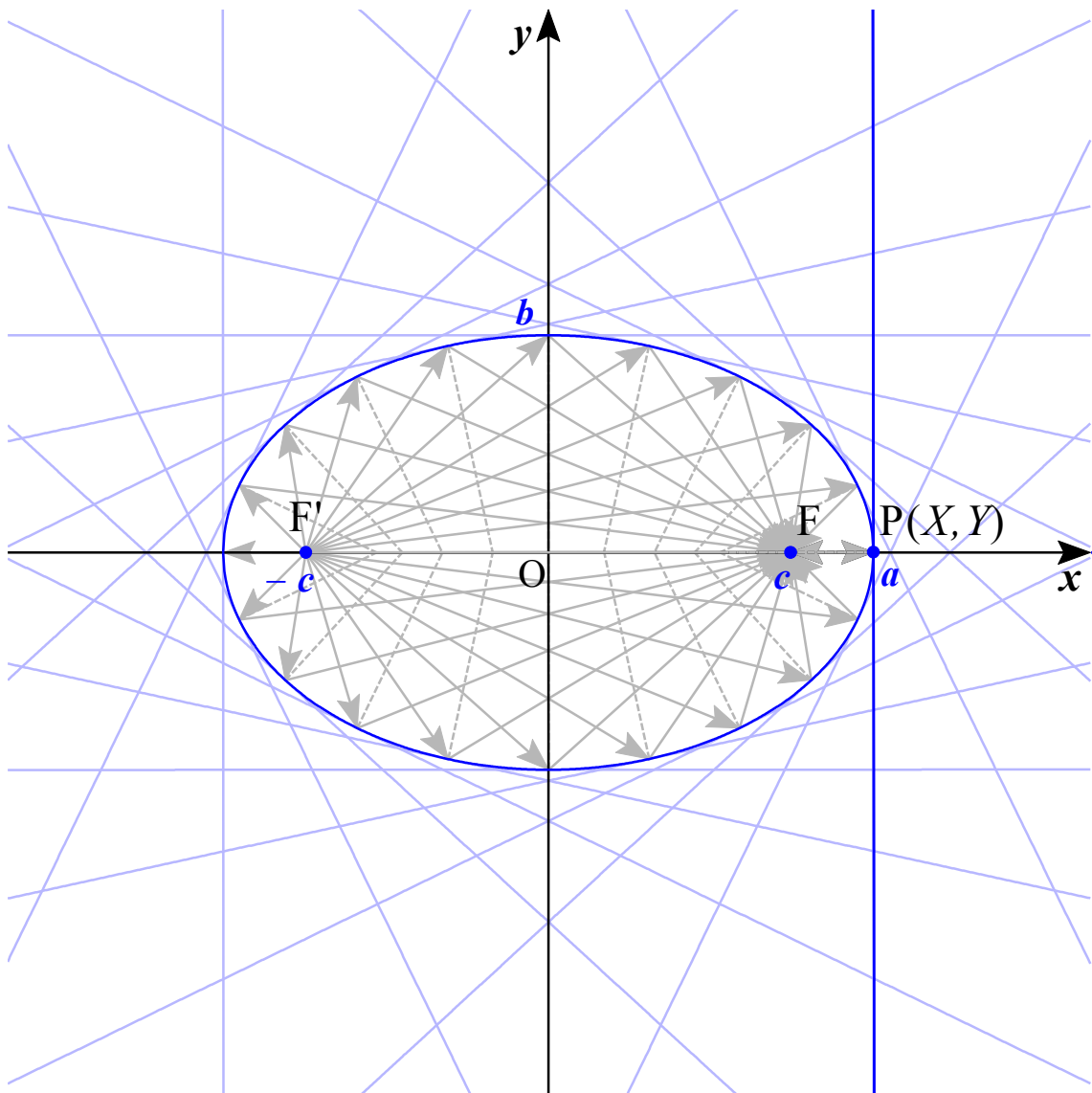
$$\text{一方、接線 } l \text{ の方程式は } \frac{X}{a^2}x + \frac{Y}{b^2}y = 1 \text{ だから、その傾きは } -\frac{b^2}{a^2} \frac{X}{Y}$$

$$\text{これより、 } PN \text{ と接線 } l \text{ の傾きの積は } \frac{a^2}{b^2} \frac{Y}{X} \times -\frac{b^2}{a^2} \frac{X}{Y} = -1,$$

すなわち PN は点 P の接線  $l$  の法線である。

ゆえに、定点  $F'$  ( $F$ ) からの光が楕円曲線で反射すると、その反射光は  $F$  ( $F'$ ) を通る。

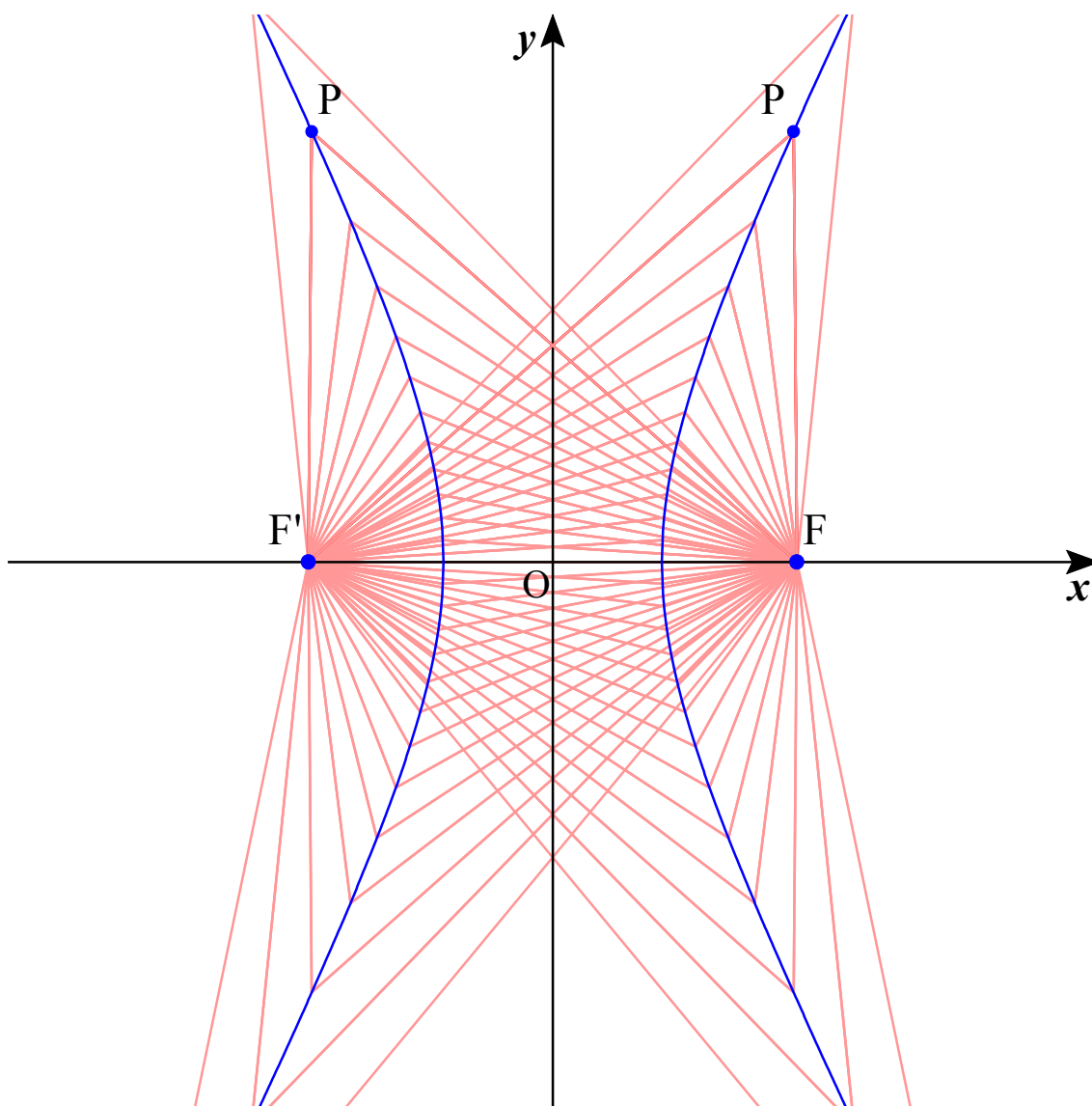




## C. 双曲線：1 対の曲線

### C-1. 双曲線の図形的定義

2 定点からの距離の差が一定な点が描く軌跡  
また，その 2 定点を「双曲線の焦点」という。



**C-2. 双曲線の標準形****焦点が  $x$  軸上にある場合**

2つの焦点を  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ ) とすると,

$F$ ,  $F'$  からの距離の差が  $2a$  となる点  $P$ ,

すなわち  $|PF - PF'| = 2a$  ( $a > 0$ ) を満たす点  $P(x, y)$  の方程式は,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2, b > 0)$$

**焦点が  $y$  軸上にある場合**

2つの焦点を  $F(0, c)$ ,  $F'(0, -c)$  ( $c > 0$ ) とすると,

$F$ ,  $F'$  からの距離の差が  $2b$  となる点  $P$ ,

すなわち  $|PF - PF'| = 2b$  ( $b > 0$ ) を満たす点  $P(x, y)$  の方程式は,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a^2 = c^2 - b^2, b > 0)$$

以降は、焦点が  $x$  軸上にある双曲線で解説する。

**標準形の導き方**

$PF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ ,  $PF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$  より,

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = 2a \quad \therefore \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

これより,  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

両辺を2乗し, 整理すると  $cx + a^2 = \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

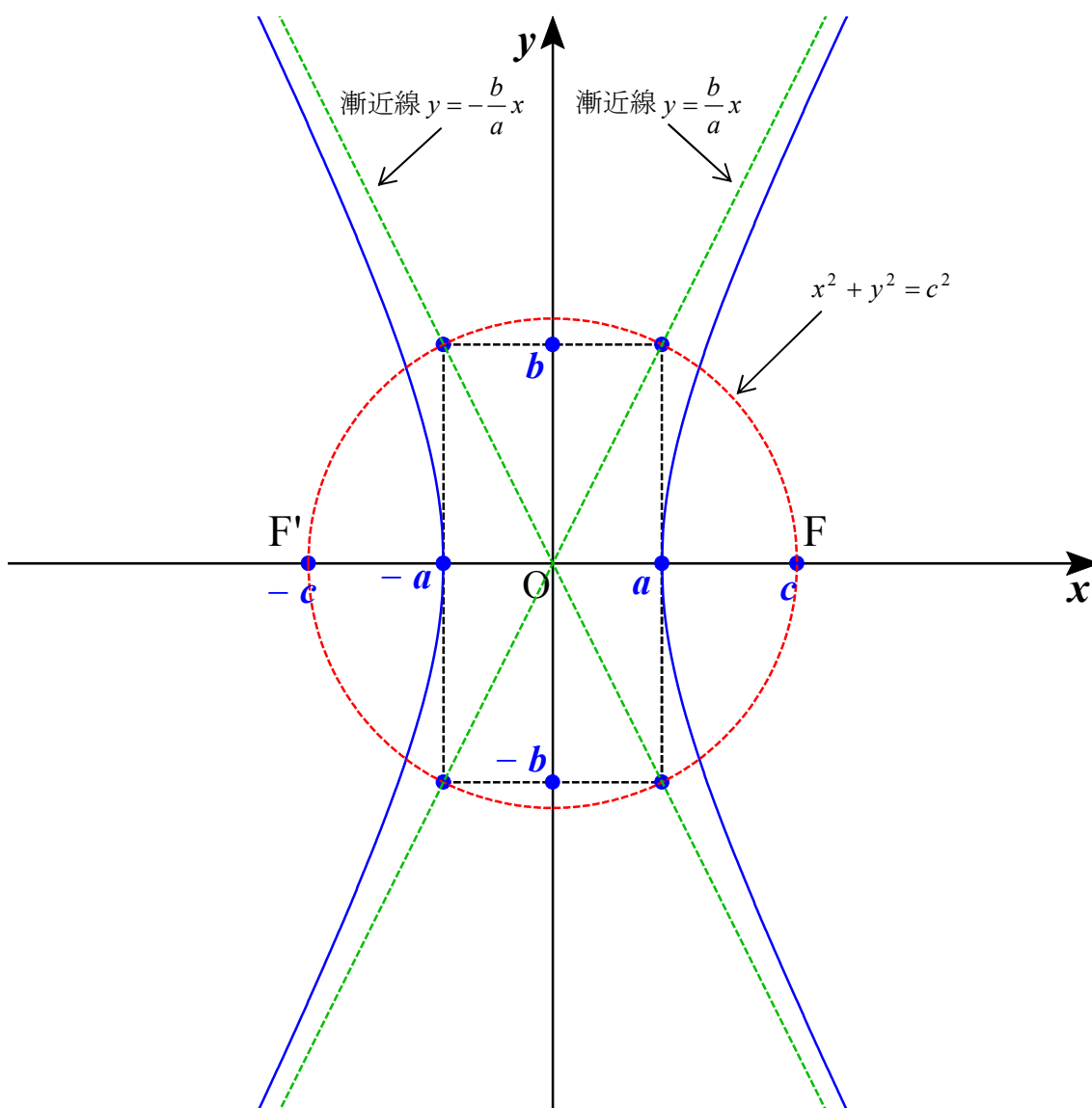
さらに両辺を2乗し, 整理すると  $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad \therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$

ここで,  $P, F, F'$  は異なる3点だから,  $\triangle PFF'$  が成立する。

したがって,  $PF < FF' + PF'$  より,  $FF' (= 2c) > |PF - PF'| (= 2a)$ , すなわち  $c > a$

よって,  $c^2 - a^2 = b^2$  とおくと,

標準形  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  が得られる。



## C-3. 双曲線のパラメータ表示

$$\text{双曲線 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 上の点のパラメータ表示は } \begin{cases} x = \frac{a}{\cos \theta} \\ y = b \tan \theta \end{cases} \text{ または } \begin{cases} x = -\frac{a}{\cos \theta} \\ y = -b \tan \theta \end{cases}$$

解説

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \text{ の両辺を } \cos^2 \theta \text{ (} \cos \theta \neq 0 \text{)} \text{ で割ると } 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\text{すなわち } 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \therefore \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta = 1$$

ここで、双曲線上の点  $(x, y)$  は、 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  を満たすから、

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad \frac{y^2}{b^2} = \tan^2 \theta \text{ とおくと、 } x^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \theta}, \quad y^2 = b^2 \tan^2 \theta$$

$$\text{よって、 } (x, y) = \left( \pm \frac{a}{\cos \theta}, \pm b \tan \theta \right) \text{ (複合は順不同)}$$

## C-4. 双曲線の接線の方程式の求め方

$y = mx + n$  とおいて始める方法と接点の座標を  $(x_1, y_1)$  とおいて始める方法がある。

尚、 $y = \pm \frac{b}{a}$  は漸近線だから、これを除外する。

1.  $y = mx + n$  とおいて求めた接線の方程式

$$\text{双曲線 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ の接線： } y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

$$\text{双曲線 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ の接線： } y = mx \pm \sqrt{-a^2 m^2 + b^2}$$

求め方

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ を } Ax^2 - By^2 = 1 \quad \left( A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2} \right), \text{ 接線の方程式を } y = mx + n \text{ とおくと、}$$

接点の  $x$  座標は  $Ax^2 - B(mx + n)^2 = 1$ , すなわち  $(A - Bm^2)x^2 - 2Bmnx - Bn^2 - 1 = 0$  の重解  
よって、判別式を  $D$  とすると、 $D = 0$  より、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= B^2 m^2 n^2 + (A - Bm^2)(Bn^2 + 1) \\ &= ABn^2 + A - Bm^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore n^2 = \frac{m^2}{A} - \frac{1}{B}$$

これと  $A = \frac{1}{a^2}$ ,  $B = \frac{1}{b^2}$  より,  $n = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$

ゆえに,  $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

## 2. 接点を $(x_1, y_1)$ と置いて求めた接線の方程式

双曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$  の接線:  $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = \pm 1$

求め方

方法 1: 重解と解と係数の関係を使う

$Ax^2 - By^2 = 1$  ( $A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2}$ ) 上の点  $(x_1, y_1)$  を接点とする接線の傾きを  $m$  とすると,

その方程式は  $y = m(x - x_1) + y_1$

よって,  $x_1$  は  $Ax^2 - B\{m(x - x_1) + y_1\}^2 = 1$ ,

すなわち  $(A - Bm^2)x^2 + 2(Bm^2x_1 - Bmy_1)x - B(m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 + y_1^2) - 1 = 0$  の重解である。

よって, 解と係数の関係より,  $x_1 + x_1 = -\frac{2(Bm^2x_1 - Bmy_1)}{A - Bm^2} \quad \therefore m = \frac{Ax_1}{By_1}$

これを  $y = m(x - x_1) + y_1$  に代入すると,  $y = \frac{Ax_1}{By_1}(x - x_1) + y_1$

両辺を  $By_1$  倍し, 整理すると  $Ax_1x - By_1y = Ax_1^2 - By_1^2$

これと  $Ax_1^2 - By_1^2 = 1$ ,  $A = \frac{1}{a^2}$ ,  $B = \frac{1}{b^2}$  より,

接線の方程式は  $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

方法 2: 極限を使う

$Ax^2 - By^2 = 1$  ( $A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2}$ ) 上の 2 点

$P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$  を通る直線の傾きを  $m$  とすると,

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{y_2 + y_1} \cdot \frac{x_2 + x_1}{x_2 + x_1} \\ &= \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} \\ &= \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} \cdot \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また、 $Ax_1^2 - By_1^2 = 1$  と  $Ax_2^2 - By_2^2 = 1$  の両辺の差をとると、

$$A(x_2^2 - x_1^2) - B(y_2^2 - y_1^2) = 0 \quad \therefore \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{A}{B} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, m = \frac{A(x_2 + x_1)}{B(y_2 + y_1)}$$

$Q(x_2, y_2) \rightarrow P(x_1, y_1)$  のときの  $m$  の極限は  $P(x_1, y_1)$  における接線の傾きだから、

$$P(x_1, y_1) \text{ における接線の傾き} = \lim_{Q \rightarrow P} m = \frac{Ax_1}{By_1}$$

よって、 $P(x_1, y_1)$  における接線の方程式は  $y = \frac{Ax_1}{By_1}(x - x_1) + y_1$

両辺を  $By_1$  倍し、整理すると  $Ax_1x - By_1y = Ax_1^2 - By_1^2$

これと  $Ax_1^2 - By_1^2 = 1$ ,  $A = \frac{1}{a^2}$ ,  $B = \frac{1}{b^2}$  より、

$$\text{接線の方程式は } \frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

### 方法3：微分を使う

$$Ax^2 - By^2 = 1 \quad \left( A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2} \right) \text{より}, 2Ax - 2By \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{Ax}{By}$$

ゆえに、 $Ax^2 - By^2 = 1$  上の点  $(x_1, y_1)$  における接線の方程式は  $y = \frac{Ax_1}{By_1}(x - x_1) + y_1$

両辺を  $By_1$  倍し、整理すると  $Ax_1x - By_1y = Ax_1^2 - By_1^2$

これと  $Ax_1^2 - By_1^2 = 1$ ,  $A = \frac{1}{a^2}$ ,  $B = \frac{1}{b^2}$  より、

$$\text{接線の方程式は } \frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

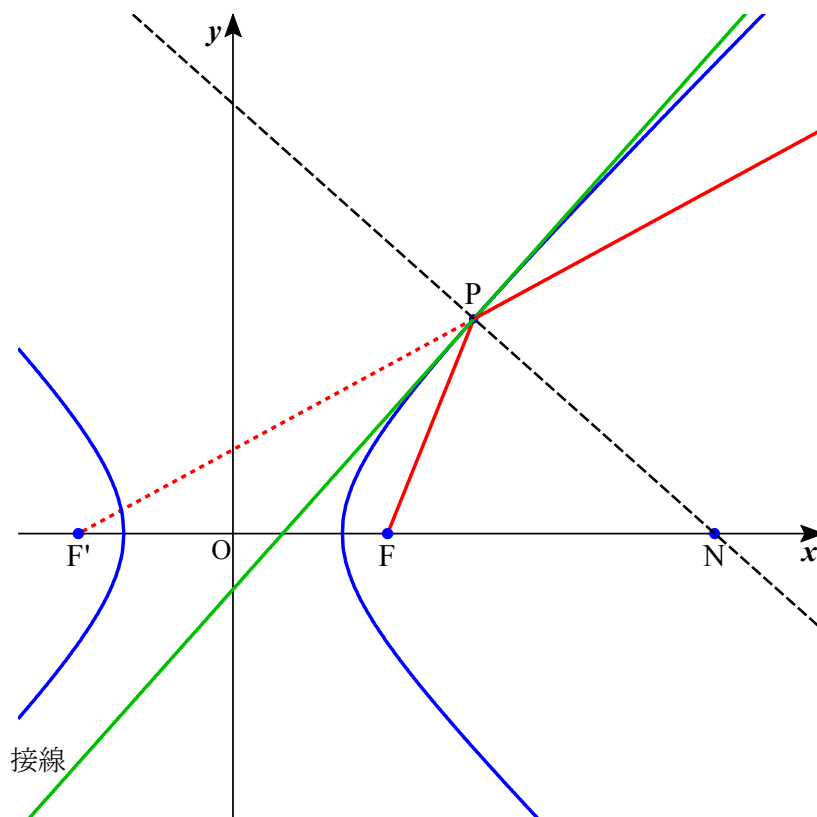
### C-5. 双曲線の焦点 F, F' とは？

双曲線上の点を  $P(x, y)$  とすると、半直線  $F'P$  ( $FP$ ) の  $P$  に関して  $F'$  ( $F$ ) と反対側の点から  $P$  へ入射した光線は  $P$  で反射後焦点  $F$  ( $F'$ ) を通る。

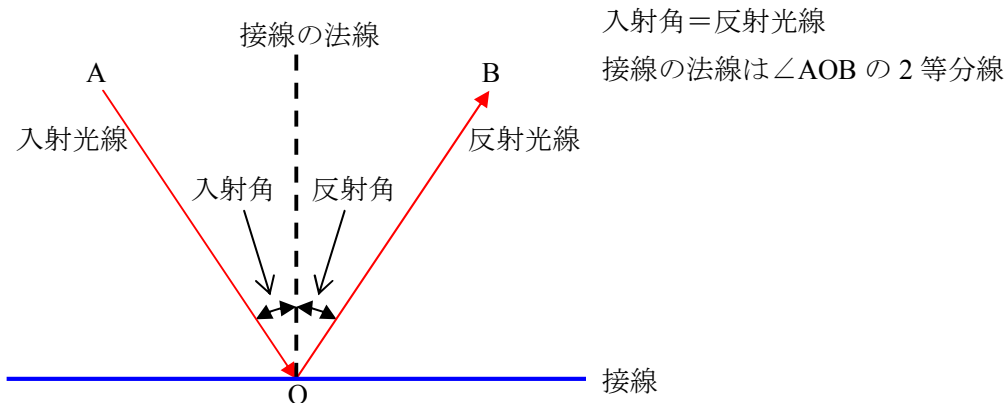
解説

双曲線  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b^2 = c^2 - a^2, b > 0$ ) は  $y$  軸に関して対称だから、

その双曲線上に点  $P(X, Y)$  ( $X > 0$ ) をとり、 $P$  と焦点  $F(c, 0)$  と  $F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ ) を頂点とする  $\triangle PF'F$  の頂点  $P$  の外角の 2 等分線が点  $P$  の接線の法線であることを示せばよい。



補足 入射角と反射角





頂点 P の外角の 2 等分線と  $x$  軸との交点を  $N(n, 0)$  とする。

PN は  $\triangle PF'F$  の頂点 P の外角の 2 等分線だから、 $PF' : PF = NF' : NF$

$$\therefore PF \cdot NF' = PF' \cdot NF \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで、

$$PF^2 = (X + c)^2 + Y^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \text{ より, } Y^2 = \frac{b^2}{a^2} X^2 - b^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

②, ③より、

$$\begin{aligned} PF^2 &= (X + c)^2 + \frac{b^2}{a^2} X^2 - b^2 \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a^2} X^2 + 2cX + c^2 - b^2 \end{aligned}$$

これと  $b^2 = c^2 - a^2$  より、

$$\begin{aligned} PF^2 &= \frac{c^2}{a^2} X^2 + 2cX + a^2 \\ &= \left( \frac{c}{a} X + a \right)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore PF' = \frac{c}{a} X + a \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\text{同様にして, } PF = \frac{c}{a} X - a \quad (\because X \geq a, c > a) \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\text{また, } NF' = n + c \quad \dots \textcircled{6}, \quad NF = n - c \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{4} \sim \textcircled{7} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると, } \left( \frac{c}{a} X - a \right) (n + c) = \left( \frac{c}{a} X + a \right) (n - c) \quad \therefore n = \frac{c^2}{a^2} X$$

$$\text{ゆえに, } N \left( \frac{c^2}{a^2} X, 0 \right)$$

$$\text{よって, 直線 PN の傾きは } \frac{Y - 0}{X - \frac{c^2}{a^2} X} = \frac{a^2}{a^2 - c^2} \cdot \frac{Y}{X} = -\frac{a^2 Y}{b^2 X}$$

$$\text{一方, 点 P における接線 } \frac{X}{a^2} x - \frac{Y}{b^2} y = 1 \text{ の傾きは } \frac{b^2 X}{a^2 Y} \text{ だから,}$$

$$\text{それらの積は } -\frac{a^2 Y}{b^2 X} \cdot \frac{b^2 X}{a^2 Y} = -1$$

よって、 $\triangle PF'F$  の頂点 P の外角の 2 等分線は点 P の接線の法線である。

## D. 3 曲線の方程式の離心率による統一

### D-1. 3 曲線の方程式の離心率による統一

$y$  軸に平行な直線  $l$  を準線, 点  $P$  から  $l$  に下ろした垂線の足を  $H$ , 焦点を  $F(a,0)$  とした場合,  
 $PF : PH = e : 1$  で定義される  $e$  を離心率という。

$e=1$  のとき, すなわち  $PF = PH$  のとき

点  $P$  の軌跡は放物線

$0 < e < 1$  のとき, すなわち  $PF < PH$  のとき

点  $P$  の軌跡は楕円

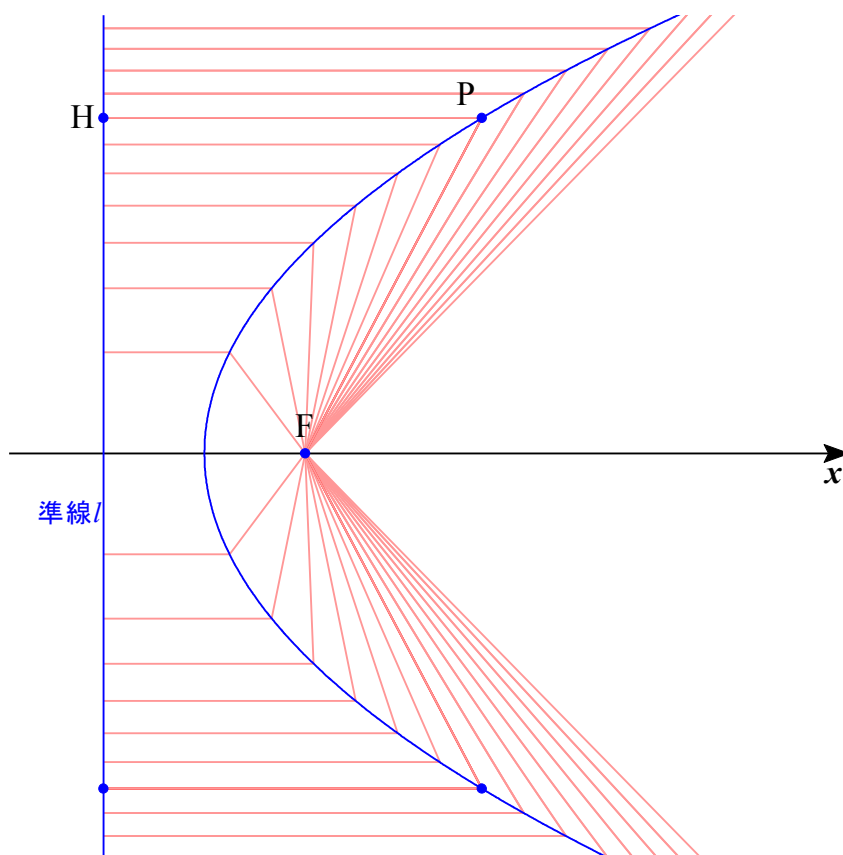
$e > 1$  のとき, すなわち  $PF > PH$  のとき

点  $P$  の軌跡は双曲線

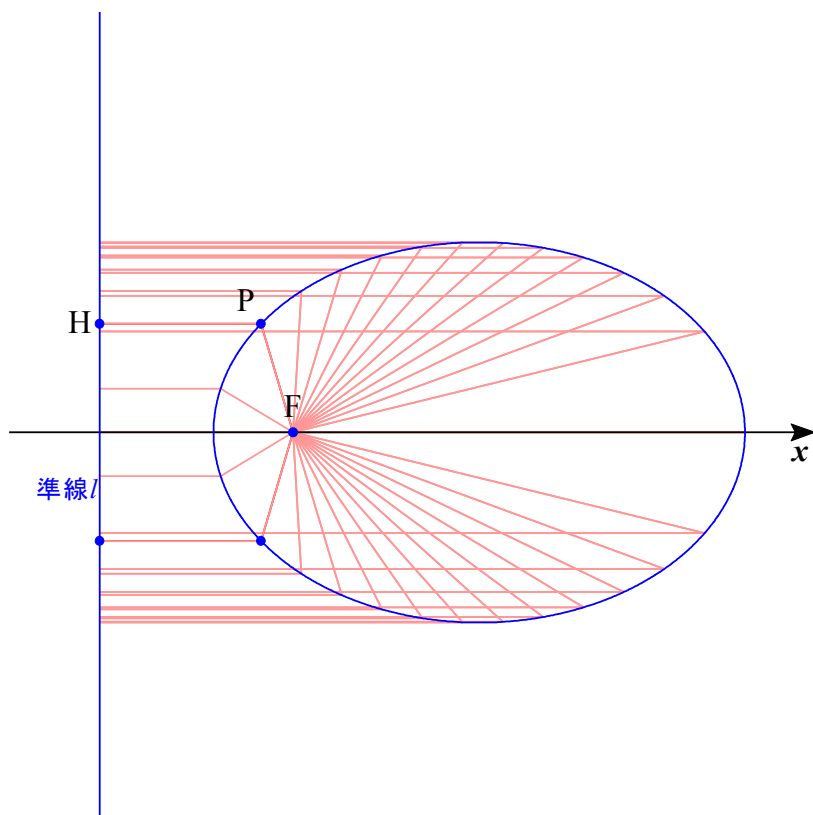
$e < 1$  のとき楕円,  $e > 1$  のとき双曲線であることは直感で理解できるでしょう。

$PF = PH$  のとき, すなわち離心率  $e=1$  のとき

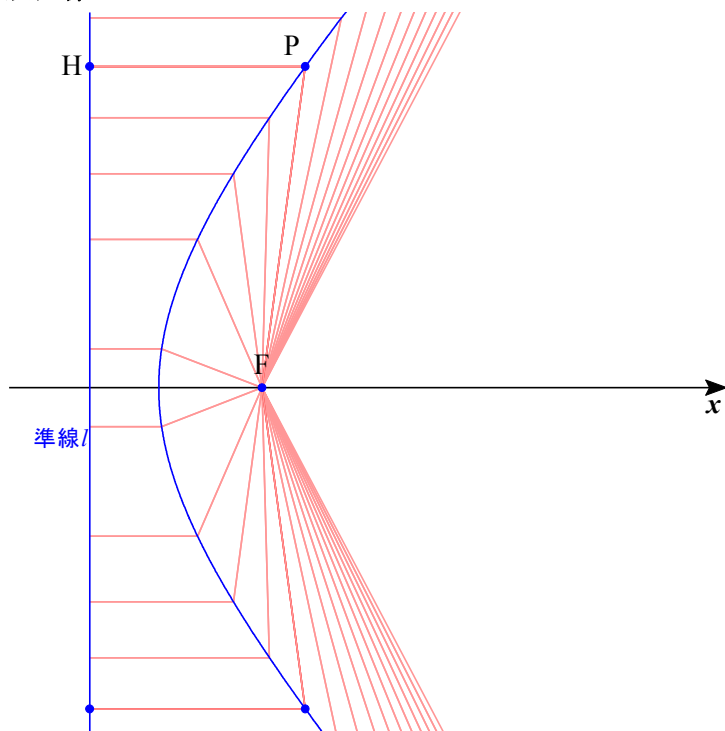
放物線



$PF < PH$  のとき, すなわち離心率  $0 < e < 1$  のとき  
楕円



$PF > PH$  のとき, すなわち離心率  $1 < e$  のとき  
双曲線



**D-2. 離心率による 2 次曲線の定義の確認**

定点  $F(a, 0)$ , 点  $P(x, y)$ , 直線  $l$  は, わかりやすさの目的で,  $x=0$  すなわち  $y$  軸とすると,

$$PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad PH = |x| \text{ より, } \sqrt{(x-a)^2 + y^2} : |x| = e : 1$$

よって,  $(x-a)^2 + y^2 : x^2 = e^2 : 1$ , すなわち  $e^2 x^2 = (x-a)^2 + y^2$

両辺を  $x$  について整理すると,  $(1-e^2)x^2 - 2ax + y^2 + a^2 = 0$

$e=1$  のとき

$(1-e^2)x^2 - 2ax + y^2 + a^2 = 0$  を変形すると,  $y^2 = 2a\left(x - \frac{a}{2}\right)$  となるから,

準線  $x = -\frac{a}{2}$ , 焦点  $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$  の放物線  $y^2 = 2ax$  を  $x$  方向に  $\frac{a}{2}$  平行移動した放物線を表す。

$e \neq 1$  のとき

$(1-e^2)x^2 - 2ax + y^2 + a^2 = 0$  を平方完成すると,  $(1-e^2)\left(x - \frac{a}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2 e^2}{1-e^2}$

両辺を  $\frac{a^2 e^2}{1-e^2}$  で割ると,  $\frac{\left(x - \frac{a}{1-e^2}\right)^2}{\frac{a^2 e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{a^2 e^2}{1-e^2}} = 1$

$0 < e < 1$  のとき

$\frac{a^2 e^2}{(1-e^2)^2} > 0$ ,  $\frac{a^2 e^2}{1-e^2} > 0$  より,  $\frac{\left(x - \frac{a}{1-e^2}\right)^2}{\frac{a^2 e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{a^2 e^2}{1-e^2}} = 1$  は楕円を表す。

$e > 1$  のとき

$\frac{a^2 e^2}{(1-e^2)^2} > 0$ ,  $\frac{a^2 e^2}{1-e^2} < 0$  より,  $\frac{\left(x - \frac{a}{1-e^2}\right)^2}{\frac{a^2 e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{a^2 e^2}{1-e^2}} = 1$  は双曲線を表す。

**D-3. 楕円・双曲線の標準形と離心率  $e$  の関係**楕円の標準形と離心率  $e$  の関係

楕円の焦点を  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ ) とすると,

$$PF + PF' = 2a \quad (a > 0) \text{ を満たす点 } P(x, y) \text{ の軌跡は } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = a^2 - c^2, b > 0)$$

$$\text{これより, } y^2 = -\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

焦点  $F(c, 0)$  の場合

$$\text{準線を } x=t \text{ とすると, } \frac{PF}{PH} = e \text{ より, } \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x-t|} = e$$

$$\text{両辺を 2 乗し, } (x-t)^2 \text{ 倍すると, } (x-c)^2 + y^2 = e^2(x-t)^2$$

$$\text{すなわち } y^2 = (-1+e^2)x^2 + 2(c-e^2t)x + e^2t^2 - c^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ は同値式だから, 右辺の係数比較より, } -\frac{b^2}{a^2} = -1+e^2, 0 = c-e^2t, b^2 = e^2t^2 - c^2$$

$$-\frac{b^2}{a^2} = -1+e^2 \text{ より, } e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\text{これと } e > 0, a > 0, c > 0 \text{ から, } e = \frac{c}{a} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$0 = c - e^2t \text{ より, } t = \frac{c}{e^2} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } c = ae \text{ だから, これを } \textcircled{4} \text{ に代入すると, } t = \frac{a}{e} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\text{よって, } \textcircled{3}, \textcircled{5} \text{ より, 離心率 } e = \frac{c}{a}, \text{ 準線 } x = \frac{a}{e}$$

焦点が  $F'(-c, 0)$  の場合

$$\text{同様にして, 離心率 } e = \frac{c}{a}, \text{ 準線 } x = -\frac{a}{e}$$

双曲線の標準形と離心率  $e$  の関係

双曲線の焦点を  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ ) とすると,

$$|PF - PF'| = 2a \quad (a > 0) \text{ を満たす点 } P(x, y) \text{ の軌跡は } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2, b > 0)$$

$$\text{これより, } y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2 \quad \dots \textcircled{6}$$

焦点  $F(c, 0)$  の場合

$$\text{準線を } x = t \text{ とすると, } \frac{PF}{PH} = e \text{ より, } \frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x-t|} = e$$

$$\text{両辺を 2 乗し, } (x-t)^2 \text{ 倍すると, } (x-c)^2 + y^2 = e^2(x-t)^2$$

$$\text{すなわち } y^2 = (-1+e^2)x^2 + 2(c-e^2t)x + e^2t^2 - c^2 \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{6} \text{ と } \textcircled{7} \text{ は同値式だから, 右辺の係数比較より, } \frac{b^2}{a^2} = -1+e^2, 0 = c - e^2t, -b^2 = e^2t^2 - c^2$$

$$\frac{b^2}{a^2} = -1+e^2 \text{ より, } e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\text{これと } e > 0, a > 0, c > 0 \text{ から, } e = \frac{c}{a} \quad \dots \textcircled{8}$$

$$0 = c - e^2t \text{ より, } t = \frac{c}{e^2} \quad \dots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{8} \text{ より, } c = ae \text{ だから, これを } \textcircled{9} \text{ に代入すると, } t = \frac{a}{e} \quad \dots \textcircled{10}$$

$$\text{よって, } \textcircled{8}, \textcircled{10} \text{ より, 離心率 } e = \frac{c}{a}, \text{ 準線 } x = \frac{a}{e}$$

焦点を  $F'(-c, 0)$  の場合

$$\text{同様にして, 離心率 } e = \frac{c}{a}, \text{ 準線 } x = -\frac{a}{e}$$

## まとめ

$$\text{楕円: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = a^2 - c^2, b > 0)$$

$$\text{双曲線: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2, b > 0)$$

$$\text{について, 離心率は } e = \frac{c}{a}$$

$$\text{焦点 } F(c, 0), F'(-c, 0) \text{ } (c > 0) \text{ の準線は, それぞれ } x = \frac{a}{e}, x = -\frac{a}{e}$$

## E. 2次曲線の極方程式

### 2次曲線の極方程式

極  $O$  を焦点, 始線  $OX$  に垂直で極 (焦点)  $O$  との距離が  $d$  の定直線を準線  $l$  とする。

$$\begin{cases} \text{準線 } l \text{ が極の左側にあるとき : } r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta} \\ \text{準線 } l \text{ が極 } O \text{ の右側にあるとき : } r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta} \end{cases}$$

ただし,  $0 < e < 1$  のとき楕円,  $e = 1$  のとき放物線,  $1 < e$  のとき双曲線

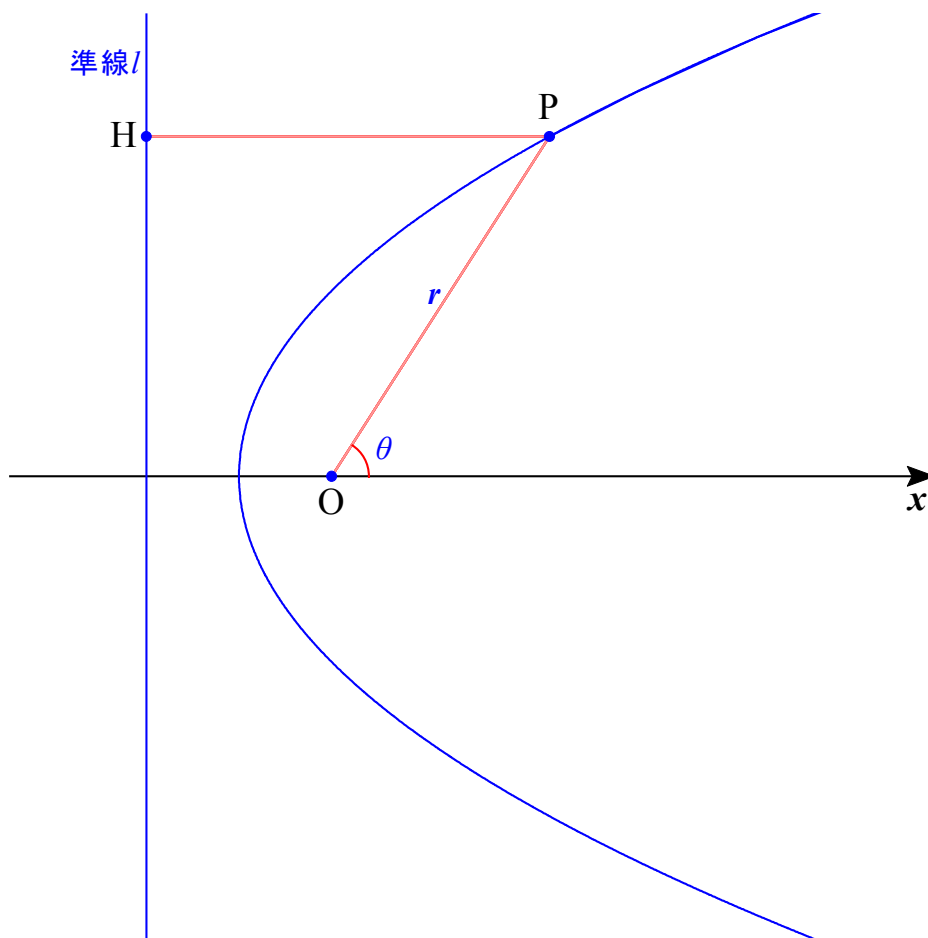
#### 解説

$P(r, \theta)$  から準線  $l$  に下ろした垂線の足を  $H$  とすると, 離心率による 2 次曲線の定義は,

$$\frac{PO}{PH} = e \quad (0 < e < 1 \text{ のとき楕円, } e = 1 \text{ のとき放物線, } 1 < e \text{ のとき双曲線})$$

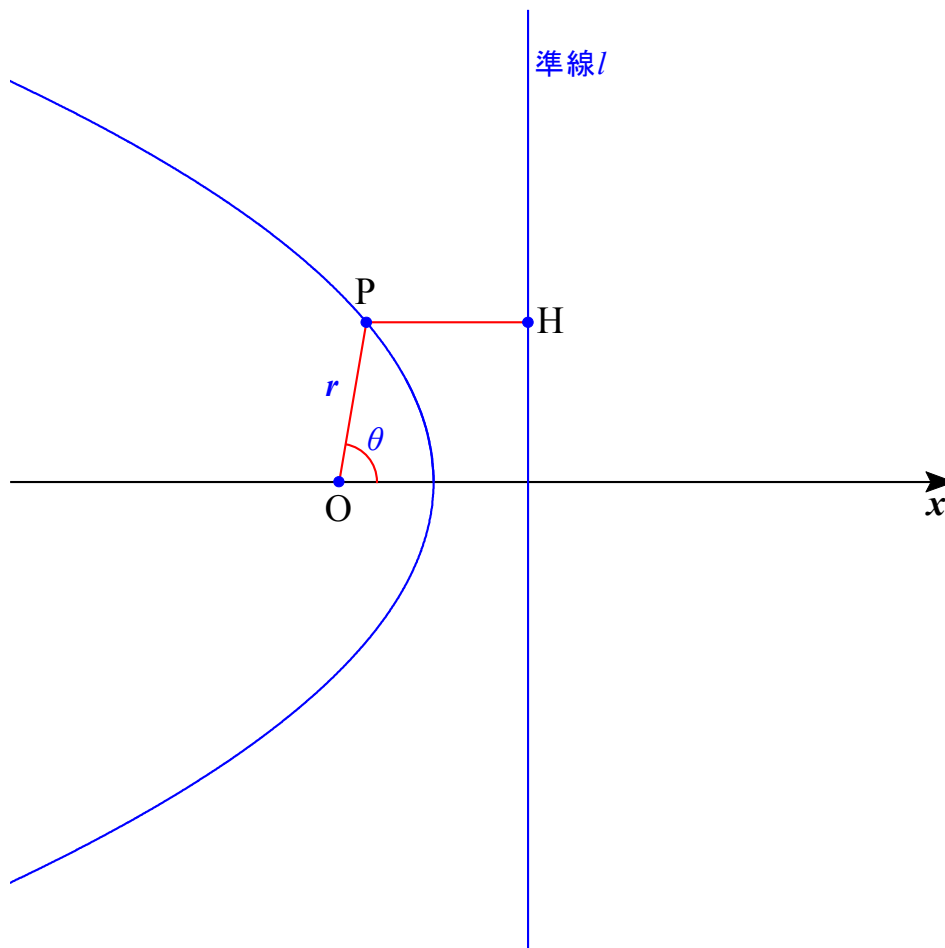
【1】 準線  $l$  が下図のように極の左側にあるとき

$$PO = r, \quad PH = d + r \cos \theta \text{ だから, } \frac{r}{d + r \cos \theta} = e \quad \therefore r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$$



【2】準線  $l$  が下図のように極の右側にあるとき

$$PO = r, \quad PH = d - r \cos \theta \quad \text{だから,} \quad \frac{r}{d - r \cos \theta} = e \quad \therefore r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$





## 補足

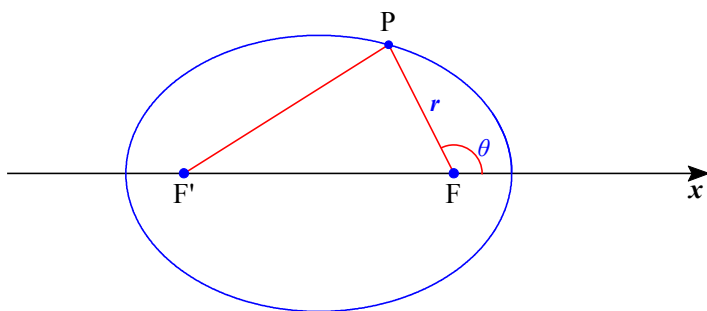
## 楕円の標準形の極方程式の求め方

焦点を  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  ( $c > 0$ ) とすると,

$$PF + PF' = 2a \quad (a > 0) \text{ を満たす点 } P(x, y) \text{ の軌跡は } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = a^2 - c^2, b > 0)$$

ここで,

【1】  $F(c, 0)$  を極,  $PF = r$ , 偏角を  $\theta$  としたとき



$$\angle PFF' = \pi - \theta, \quad FF' = 2c \text{ より,}$$

$$PF'^2 = PF^2 + FF'^2 - 2PF \cdot FF' \cos(\pi - \theta)$$

$$= r^2 + 4c^2 + 4cr \cos \theta$$

$$\text{一方, } PF + PF' = 2a \text{ より,}$$

$$PF'^2 = (2a - PF)^2$$

$$= (2a - r)^2$$

$$= 4a^2 - 4ar + r^2$$

$$\text{よって, } r^2 + 4c^2 + 4cr \cos \theta = 4a^2 - 4ar + r^2 \quad \therefore r = \frac{a^2 - c^2}{a + c \cos \theta}$$

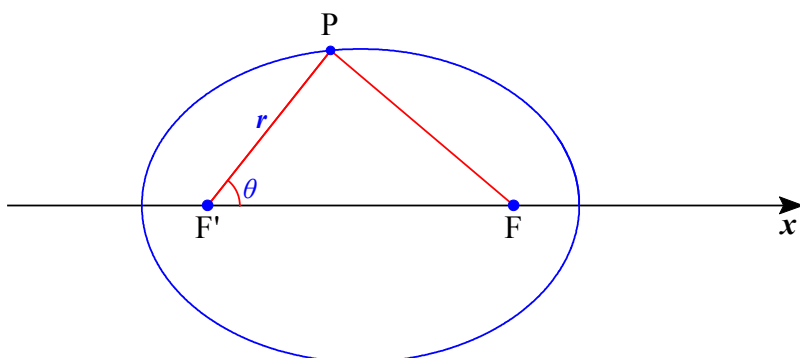
さらに、これを離心率  $e$  も使って表してみると、

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a + c \cos \theta} \text{ より, } r = \frac{\frac{a^2 - c^2}{a}}{1 + \frac{c}{a} \cos \theta}$$

$$\text{これと } a^2 - c^2 = b^2 \text{ より, } r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a} \cos \theta}$$

$$\frac{c}{a} = e \text{ (29 ページ) より, } r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + e \cos \theta}$$

【2】  $F'(-c, 0)$  を極,  $PF' = r$ , 偏角を  $\theta$  としたとき



$\angle PF'F = \theta$ ,  $FF' = 2c$  より,

$$\begin{aligned} PF^2 &= PF'^2 + FF'^2 - 2PF' \cdot FF' \cos \theta \\ &= r^2 + 4c^2 - 4cr \cos \theta \end{aligned}$$

一方,  $PF + PF' = 2a$  より,

$$\begin{aligned} PF^2 &= (2a - PF')^2 \\ &= (2a - r)^2 \\ &= 4a^2 - 4ar + r^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } r^2 + 4c^2 - 4cr \cos \theta = 4a^2 - 4ar + r^2 \quad \therefore r = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \theta}$$

さらに, これを離心率  $e$  も使って表してみると,

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \theta} \text{ より, } r = \frac{\frac{a^2 - c^2}{a}}{1 + \frac{c}{a} \cos \theta}$$

$$\text{これと } a^2 - c^2 = b^2 \text{ より, } r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{c}{a} \cos \theta}$$

$$\frac{c}{a} = e \text{ (29 ページ) より, } r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - e \cos \theta}$$