例題

平面上のベクトル $\vec{a}\,,\vec{b}$ が $\left|\vec{a}+3\vec{b}\right|=1,\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|=1$ を満たすように動く。

このとき，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ の最大値を R，最小値を r とする。R と r を求めよ。

解

$\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}$，$\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ とおいて，

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の連立方程式 $\begin{cases}\vec{p}=\vec{a}+3\vec{b}\\ \vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}\end{cases}$ を解くと，$\vec{a}=\dfrac{3\vec{p}-\vec{q}}{10},\vec{b}=\dfrac{\vec{p}+3\vec{q}}{10}$

$\therefore \vec{a}+\vec{b}=\dfrac{1}{5}\left(2\vec{p}+\vec{q}\right)$

条件より $\left|\vec{p}\right|=\left|\vec{a}+3\vec{b}\right|=1$，$\left|\vec{q}\right|=\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|=1$，また $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角を θ $\left(0\le\theta<2\pi\right)$ とすると，

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\frac{1}{25}\left(4\left|\vec{p}\right|^2+\left|\vec{q}\right|^2+4\vec{p}\cdot\vec{q}\right)=\frac{1}{25}\left(4+1+4\cos\theta\right)=\frac{5+4\cos\theta}{25}$$

$$\therefore \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\frac{\sqrt{5+4\cos\theta}}{5}$$

ここで，

$\cos\theta=1$ とすると，$\theta=0$，$\left|\vec{p}\right|=\left|\vec{a}+3\vec{b}\right|=1$，$\left|\vec{q}\right|=\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|=1$ より，

$\vec{a}+3\vec{b}=3\vec{a}-\vec{b}\quad \therefore \vec{a}=2\vec{b}$

また，このとき，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\dfrac{\sqrt{5+4\cdot 1}}{5}=\dfrac{3}{5}$

$\cos\theta=-1$ とすると，$\theta=\pi$，$\left|\vec{p}\right|=\left|\vec{a}+3\vec{b}\right|=1$，$\left|\vec{q}\right|=\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|=1$ より，

$\vec{a}+3\vec{b}=-\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\quad \therefore \vec{a}=-\dfrac{1}{2}\vec{b}$

また，このとき，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\dfrac{\sqrt{5+4\cdot(-1)}}{5}=\dfrac{1}{5}$

以上より，

$\vec{a}=2\vec{b}$ のとき，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ は最大値 $R=\dfrac{3}{5}$ をとる。

$\vec{a}=-\dfrac{1}{2}\vec{b}$ のとき，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ は最小値 $r=\dfrac{1}{5}$ をとる。