**取り出した $m$ 枚のカードの数字の最大値が $i$，最小値が $j$ となる確率**

　$n$ 枚のカードそれぞれに $1,2,3,\cdots,n$ の数字を 1 つずつ，同じ数字のカードができないように書いたものを 1 組とし，それを $m$ 組 $(m \geq 2)$ 用意する。
続いて，$m$ 組のそれぞれからカードを 1 枚ずつ選ぶ。
このとき，数字の最大値が $i$，最小値が $j$ $(i > j)$ である確率を求めよ。

解

$m$ 組をすべて区別する。

数字の組の総数は $n^m$ ・・・①

組を構成する数が $j$ 以上 $i$ 以下の組の集合を U とし，

U の部分集合で，

組を構成する数が $j$ 以上 $(i-1)$ 以下の組の集合を A

組を構成する数が $(j+1)$ 以上 $i$ 以下の組の集合を B

とすると，

最大値 $i$ を含む集合は $\overline{\mathrm{A}}$，最小値 $j$ を含む集合は $\overline{\mathrm{B}}$ だから，

最大値が $i$ かつ最小値が $j$ である集合は $\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}$，すなわち $\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}$ である。

よって，数字が $j$ 以上 $i$ 以下である場合の数は，

$$
\begin{aligned}
n\left(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}\right)&=n(\mathrm{U})-n(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\\
&=n(\mathrm{U})-\{n(\mathrm{A})+n(\mathrm{B})-n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\}
\end{aligned}
$$

ここで，

$n(\mathrm{U})=(i-j+1)^m$

$n(\mathrm{A})=\{(i-1)-j+1\}^m=(i-j)^m$

$n(\mathrm{B})=\{i-(j+1)+1\}^m=(i-j)^m$

$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ は組を構成する数が $(j+1)$ 以上 $(i-1)$ 以下の組の集合だから，

$n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\{(i-1)-(j+1)-1\}^m=(i-j-1)^m$

よって，

$$
\begin{aligned}
n\left(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}\right)&=(i-j+1)^m-\{(i-j)^m+(i-j)^m-(i-j-1)^m\}\\
&=(i-j+1)^m-2(i-j)^m+(i-j-1)^m \quad ・・・②
\end{aligned}
$$

①，②より，求める確率は，$\dfrac{(i-j+1)^m-2(i-j)^m+(i-j-1)^m}{n^m}$ ・・・(答)

補足

$i-j=x$ $(1\leq x\leq n-1)$ とおくと，

$$
\frac{(i-j+1)^m-2(i-j)^m+(i-j-1)^m}{n^m}=\frac{(x+1)^m-2x^m+(x-1)^m}{n^m}
$$

たとえば，$n=10$ とすると，

$m=2$ のとき，$\dfrac{(x+1)^2-2x^2+(x-1)^2}{10^2}=\dfrac{2}{10^2}$

$m=3$ のとき，$\dfrac{(x+1)^3-2x^3+(x-1)^3}{10^3}=\dfrac{6x}{10^3}$

$m=4$ のとき，$\dfrac{(x+1)^4-2x^4+(x-1)^4}{10^4}=\dfrac{12x^2+2}{10^4}$

$m=5$ のとき, $\dfrac{(x+1)^5-2x^5+(x-1)^5}{10^5}=\dfrac{20x^3+10x}{10^5}$

$m=6$ のとき, $\dfrac{(x+1)^6-2x^6+(x-1)^6}{10^6}=\dfrac{30x^4+30x^2+2}{10^5}$

$m=7$ のとき, $\dfrac{(x+1)^7-2x^7+(x-1)^7}{10^7}=\dfrac{42x^5+35x^3+7x}{10^5}$

$\vdots$