積分の平均値の定理

$f(x)$が閉区間$[a,\ b]$で連続ならば,

$\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=f(c)$となる$c\ (a<c<b)$が少なくとも1つ存在する。

解説

$f(x)$が閉区間$[a,\ b]$で連続ならば, $f(x)$はこの区間で最大値$f_{\max}$と最小値$f_{\min}$をもつ。
よって, $f_{\min}\le f(x)\le f_{\max}$

したがって, $f_{\min}(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le f_{\max}(b-a)$であり,

これより, $f_{\min}\le\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le f_{\max}$

これと$f(x)$は閉区間$[a,\ b]$で連続かつ$f_{\min}\le f(x)\le f_{\max}$であることから,

中間値の定理より, $f(c)=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$となる$c\ (a<c<b)$が少なくとも1つ存在する。

覚え方：微分の平均値の定理と関連させて

$f(x)$の原始関数を$F(x)$とすると, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$より, $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$

よって, 平均値の定理より, $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(c)$となる$c$ （$a<c<b$） が存在する。

これと$F'(c)=f(c)$より, $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=f(c)$となる$c\ (a<c<b)$が存在する。