等比数列の和の公式とその導き方

等比数列$a_n = ar^{n-1}$の初項から第n項までの和をS_nとすると，

$$S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$$

あるいは

$$S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

導き方 1：階差数列を利用

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{ar^{k-1}(r-1)}{r-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{ar^k - ar^{k-1}}{r-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1} - a_k}{r-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - a_{k+1}}{1-r} \\
&= \frac{1}{1-r}\left\{\left(a_1 - a_2\right) + \left(a_2 - a_3\right) + \cdots + \left(a_{n-1} - a_n\right) + \left(a_n - a_{n+1}\right)\right\} \\
&= \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}
\end{aligned}$$

導き方 2：級数（数列の和）を利用

$$\begin{aligned}
S_n - rS_n &= \left(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}\right) - \left(ar + ar^2 + ar^3 \cdots + ar^{n-1} + ar^n\right) \\
&= a - ar^n \\
&= a_1 - a_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\therefore (1-r)S_n = a_1 - a_{n+1}$$

$$\therefore S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$$

$S_n = \dfrac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$ は，$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ より使い勝手が良い

$S_n = \dfrac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$ が意味するのは，

「等比数列の第 1 項から第 n 項までの和は，$\dfrac{第1項の値 - 第(n+1)項の値}{1-r}$ で与えられる」

ということだから，

等比数列の第 x 項から第 y 項までの和を求める際に，即座に $\dfrac{a_x - a_{y+1}}{1-r}$ と反応できる。

実際，第 x 項から第 y 項までの和は，
「初項から第 y 項までの和 S_y －初項から第 $(x-1)$ 項までの和 S_{x-1}」だから，
それで確かめてみると，

$$
\begin{aligned}
S_y - S_{x-1} &= \frac{a_1 - a_{y+1}}{1-r} - \frac{a_1 - a_{(x-1)+1}}{1-r} \\
&= \frac{a_1 - a_{y+1}}{1-r} - \frac{a_1 - a_x}{1-r} \\
&= \frac{a_x - a_{y+1}}{1-r}
\end{aligned}
$$

$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ の公式の場合，

$1-r^n$ の 1 は，第 1 項の $r^0=1$ の意味であるが，その意味が見えにくくなっているため，
上のように，即座に反応しにくい。

$S_n = \dfrac{a(r^0-r^n)}{1-r}$ としても，つらいかな・・・。

等差数列においてもわかりやすい公式で理解しよう

等差数列の和＝項の値の平均値×項数＝$\dfrac{最初の項の値＋最後の項の値}{2} \times$ 項数