漸化式が与えられた数列の極限の求め方

方法 1.

漸化式から数列$\{a_n\}$の一般項を求め，$\lim_{n\to\infty} a_n$を実行する。

方法 2.

$a_1, a_2, a_3, \cdots$の値から数列$\{a_n\}$の一般項を推定し，それを「数学的帰納法」で証明後，

$\lim_{n\to\infty} a_n$を実行する。

方法 3.

方法 1，2 が使えない場合

$f(x)$が連続関数で，

漸化式$a_{n+1} = f(a_n)$で与えられた数列$\{a_n\}$が有限確定値αに収束するならば，

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$ より，$\alpha = f(\alpha)$が成り立つ。

逆は必ずしも成り立たないが，$x = f(x)$の解は必要条件であるので，

このことを利用して，はさみうちの原理から$\lim_{n\to\infty} a_n$を求めればよい。

手順 1.

漸化式$a_{n+1} = f(a_n)$で与えられた数列$\{a_n\}$について，$x = f(x)$の解を求める。

仮に，この解をαとする。

手順 2.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n - \alpha| = 0$ より，

$\lim_{n\to\infty}|a_n - \alpha| = 0$となるかどうか調べる。

$\lim_{n\to\infty}|a_n - \alpha| = 0$が成り立つとき，$|a_n - \alpha|$が単調に減少する場合が多いので，

$|a_{n+1} - \alpha| \leq r|a_n - \alpha| \quad (0 < r < 1)$となるような$r$を見つける。

***r* の見つけ方**

$|a_{n+1} - \alpha| = |f(a_n) - \alpha|$を変形し，$|a_{n+1} - \alpha| = |A||a_n - \alpha|$とした後，

$|A| \leq |r| \ (|r| < 1)$を満たす適当なrを見つける。

そのようなrが存在すると，$|a_{n+1} - \alpha| = |A||a_n - \alpha| \leq |r||a_n - \alpha|$ より，

$$|a_n - \alpha| \leq |r||a_{n-1} - \alpha| \leq \cdots \leq |r|^{n-1}(a_1 - \alpha) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (\because |r| < 1)$$

が成り立つので，はさみうちの原理から，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$となる。

方法 3 の例

数列$\{a_n\}$が $0<a_1<3$， $a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$をみたすとき， $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

解

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ （α は有限確定値）ならば，

$a_{n+1}=1+\sqrt{1+a_n}$ より， $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\sqrt{1+a_n}\right\}$ $\therefore \alpha=1+\sqrt{1+\alpha}$

よって，

$x=1+\sqrt{1+x}$ の解は， $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ （α は有限確定値）であるための必要条件である。

ここで， $x=1+\sqrt{1+x}$ の解を求めると， $x-1=\sqrt{1+x}$ より， $(x-1)^2=1+x$
$\therefore x(x-3)=0$ $\therefore x=0,3$

よって， $\lim_{n\to\infty} a_n$ は， 0 または 3 である。

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ とすると，

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-0&=1+\sqrt{1+a_n}-0\\
&=\left(1+\sqrt{1+a_n}\right)\frac{1-\sqrt{1+a_n}}{1-\sqrt{1+a_n}}\\
&=\frac{-a_n}{1-\sqrt{1+a_n}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{1+a_n}-1}\cdot a_n
\end{aligned}
$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{1+a_n}-1}\cdot a_n$$

ここで， $\left|\frac{1}{\sqrt{1+a_n}-1}\right|<1$ ならば， $\left|\frac{1}{\sqrt{1+a_n}-1}\right|\leq r<1$ となるような r が存在するから，

$a_n=\frac{1}{\sqrt{1+a_{n-1}}-1}\cdot a_{n-1}\leq ra_{n-1}=r^{n-1}a_1$ とはさみうちの原理から， $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ となる。

そこで， a_n の値の範囲について調べる。

$n=1$ のとき， $0<a_1<3$

$n=k$ のとき， $0<a_k<3$ とすると， $2<1+\sqrt{1+a_k}<3$

これと $a_{k+1}=1+\sqrt{1+a_k}$ より， $2<a_{k+1}<3$

よって，数学的帰納法により $0 < a_n < 3$ ・・・①が成り立つ。

$\therefore 0 < \sqrt{1+a_n} - 1 < 1$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{1+a_n} - 1} > 1$

$\therefore a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a_n} - 1} \cdot a_n > a_n$

これより，$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < 3$

これは，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ とした仮定と矛盾する。よって，$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$ とすると，

$$
\begin{aligned}
|a_{n+1} - 3| &= \left|1 + \sqrt{1+a_n} - 3\right| \\
&= \left|\left(-2 + \sqrt{1+a_n}\right)\frac{2+\sqrt{1+a_n}}{2+\sqrt{1+a_n}}\right| \\
&= \left|\frac{a_n - 3}{2+\sqrt{1+a_n}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{1+a_n}+2} \cdot (a_n - 3)\right|
\end{aligned}
$$

$\therefore |a_{n+1} - 3| = \left|\dfrac{1}{\sqrt{1+a_n}+2} \cdot (a_n - 3)\right|$

①より，$3 < \sqrt{1+a_n} + 2 < 4$ $\quad \therefore \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{\sqrt{1+a_n}+2} < \dfrac{1}{3}$

よって，$|a_{n+1} - 3| = \dfrac{1}{\sqrt{1+a_n}+2} \cdot |a_n - 3| < \dfrac{1}{3}|a_n - 3|$

よって，$|a_n - 3| < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} |a_1 - 3| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 3$