§4　運動量

71　一直線上の衝突のはねかえり係数

$\dfrac{衝突直後の相対速度}{衝突直前の相対速度}=-e$ であるから，右向きを正とすると，$\dfrac{-2-4}{10-(-5)}=-e$　　$\therefore e=0.4$

床に垂直に衝突した小球のはねかえりの数列

力学的保存則が成り立つ系で，水平な床と衝突する質量mの小球を考える。

床からの高さh_0の点から小球を落とす。

衝突のはねかえり係数をeとする。

n回衝突直後の速さをv_nとする。

n回衝突後の最高点の高さをh_nとする。

n回衝突直後の速さの数列$\{v_n\}$の一般項$v_n=e^n\sqrt{2gh_0}$の求め方

力学的エネルギー保存則より，$n+1$回目の衝突直前の速さもv_nだから，

$v_{n+1}=ev_n$より，$\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=e$

これは，数列$\{v_n\}$が初項v_1，公比eの等比数列であることを示している。

$\therefore v_n=e^{n-1}v_1$　　・・・①

また，力学的エネルギー保存則より，$mgh_0=\dfrac{1}{2}mv_0{}^2$が成り立つから，$v_0=\sqrt{2gh_0}$

よって，$v_1=e\sqrt{2gh_0}$　　・・・②

①，②より，$v_n=e^n\sqrt{2gh_0}$

n回衝突後の最高点の高さの数列$\{h_n\}$の一般項$h_n=e^{2n}h_0$の求め方

$n+1$回目の衝突直後の小球の速さは，$v_{n+1}=e\sqrt{2gh_n}$であり，

床からの高さは床より上を正とした位置であるから，

$0-\left(e\sqrt{2gh_n}\right)^2=-2gh_{n+1}$より，$h_{n+1}=e^2h_n$　　$\therefore \dfrac{h_{n+1}}{h_n}=e^2$

これは，数列$\{h_n\}$が初項h_1，公比e^2の等比数列であることを示している。

よって，$h_n=\left(e^2\right)^{n-1}h_1$

これと，$0-v_1{}^2=-2gh_1$より，$h_1=\dfrac{v_1{}^2}{2g}=\dfrac{\left(e\sqrt{2gh_0}\right)^2}{2g}=e^2h_0$

よって，$h_n=e^{2n}h_0$

81　ロケットからの燃料の噴射

補足

噴射直後のロケットの速度をV'，燃料の速度をv'とすると，

運動量保存則より，$MV = mv' + (M - m)V'$

また，ロケットから見た燃料の速度は負だから，$-v = v' - V'$　$\therefore v' = V' - v$

よって，$MV = m(V' - v) + (M - m)V'$

$$\therefore V' = \frac{MV + mv}{M}$$

$$\therefore v' = V' - v = \frac{M(V - v) + mv}{M}$$