§5　慣性力・円運動・単振動・万有引力

95　エレベーター内の台秤の目盛が示す値

(1)

エレベーターの下降加速度の大きさを a，物体の質量を m，
物体が受ける台秤の垂直抗力の大きさを N とすると，
エレベーター内で静止中の観測者が見た物体に働く力のつり合いの式は，$N+ma=mg$
$\therefore N=m(g-a)$
垂直抗力は物体と台秤の作用・反作用の力だから，台秤は物体から大きさ N の力を受け，
その大きさが目盛の値となる。
台秤が mg N の力を受けるとき，台秤の目盛は m kg を示すから，
台秤が $m(g-a)$N の力を受けるときの台秤の目盛を x kg とすると，
$\dfrac{m(g-a)}{mg}=\dfrac{x}{m}$ または $\dfrac{m}{mg}=\dfrac{x}{m(g-a)}$ より，$x=\dfrac{m(g-a)}{g}$
よって，求める値は，$\dfrac{2.0\times(9.8-1.0)}{9.8}\approx 1.79\approx 1.8$

99　円軌道を走る電車内の天井からつるしたおもりの傾き

別解

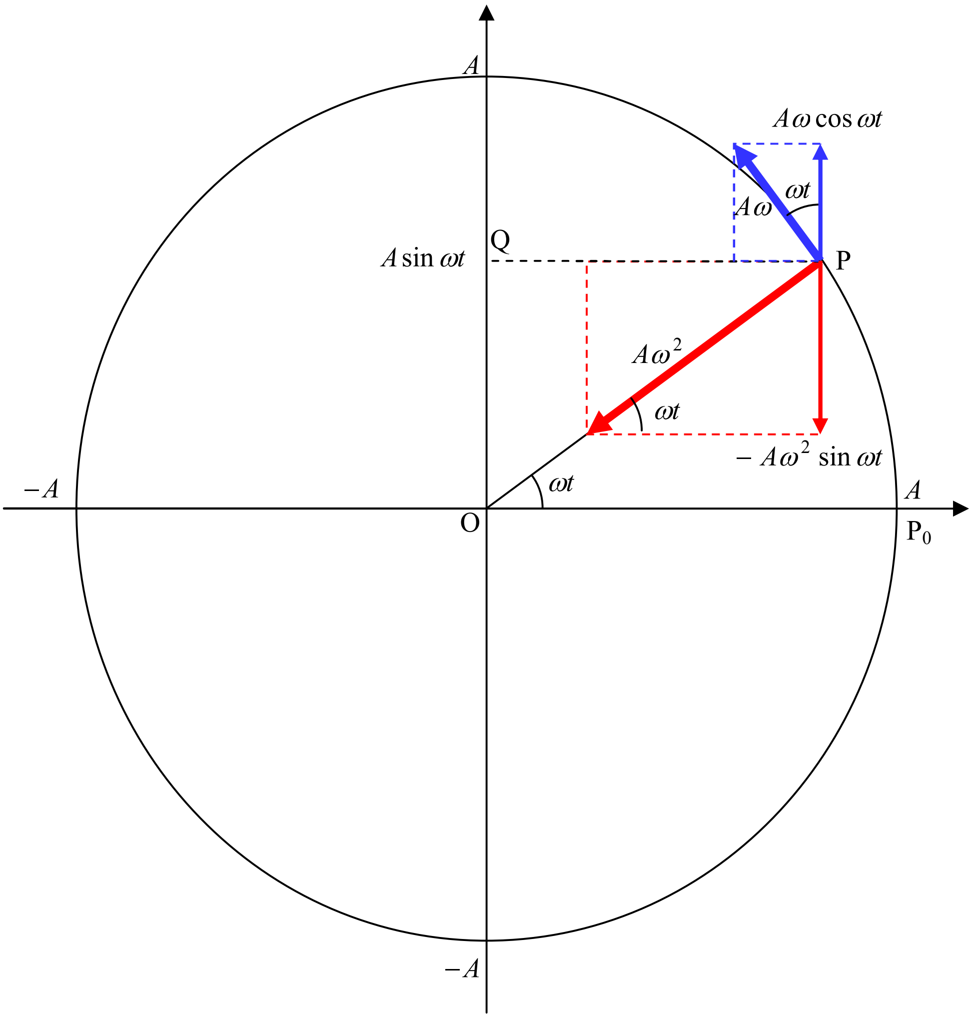
$$\tan\theta=\frac{\frac{mv^2}{r}}{mg}=\frac{v^2}{gr}$$

100　円軌道の傾き

別解

斜面に沿った力のつり合いより，$mg\sin\theta=\dfrac{mv^2}{r}\cos\theta$　　$\therefore \tan\theta=\dfrac{v^2}{gr}$

101　等速円運動を **1** つの直径上へ射影した点の運動



108　単振動の初期位相

(1)

$y=A\sin\frac{2\pi}{T}t$ を $\frac{2\pi}{T}t$ 軸方向に $-\frac{\pi}{4}$ 平行移動したグラフだから，

$y=A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}t-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$　　$\therefore y=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{4}\right)$

(2)

$y=A\sin\frac{2\pi}{T}t$ を $\frac{2\pi}{T}t$ 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ 平行移動したグラフだから，$y=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{4}\right)$

109　並列ばね振り子

(1)

2 本のばねを 1 本のばねに置き換えたときのばね定数（合成ばね定数）を k_{T} とすると，

$k_{\mathrm{T}}=k_1+k_2$（補足参照）

x 座標は自然長を $x=0$ とし，鉛直下向きを正とするから，

ばねの復元力（弾性力）の向きは，$x>0$ のとき負，$x<0$ のとき正

また，重力の向きは正

これより，おもりに働く鉛直方向の外力は $-(k_1+k_2)x+mg$

よって，おもりの単振動運動の運動方程式は

$$ma=-(k_1+k_2)x+mg$$
$$=-(k_1+k_2)\left(x-\frac{mg}{k_1+k_2}\right)$$

ゆえに，$a=-\frac{k_1+k_2}{m}\left(x-\frac{mg}{k_1+k_2}\right)$

補足：間に物体をはさんだときの合成ばね定数

自然長の状態の 2 つのばねが，間に物体をはさんで，つながっている（図 3-1）。

（ばね定数：k_1（青），k_2（茶））

この物体をばねの向きに大きさ F の外力で引いたときの変位の大きさを x とする（図 3-2）。

このときの力のつり合いは，

$k_1x + k_2x = F$　・・・⑤

このばねを 1 本のばねと見なし，そのばね定数 k_T とすると（図 3-3 あるいは図 3-4），

$k_Tx = F$　・・・⑥

⑤，⑥より，

$k_Tx = k_1x + k_2x$

よって，

$k_T = k_1 + k_2$

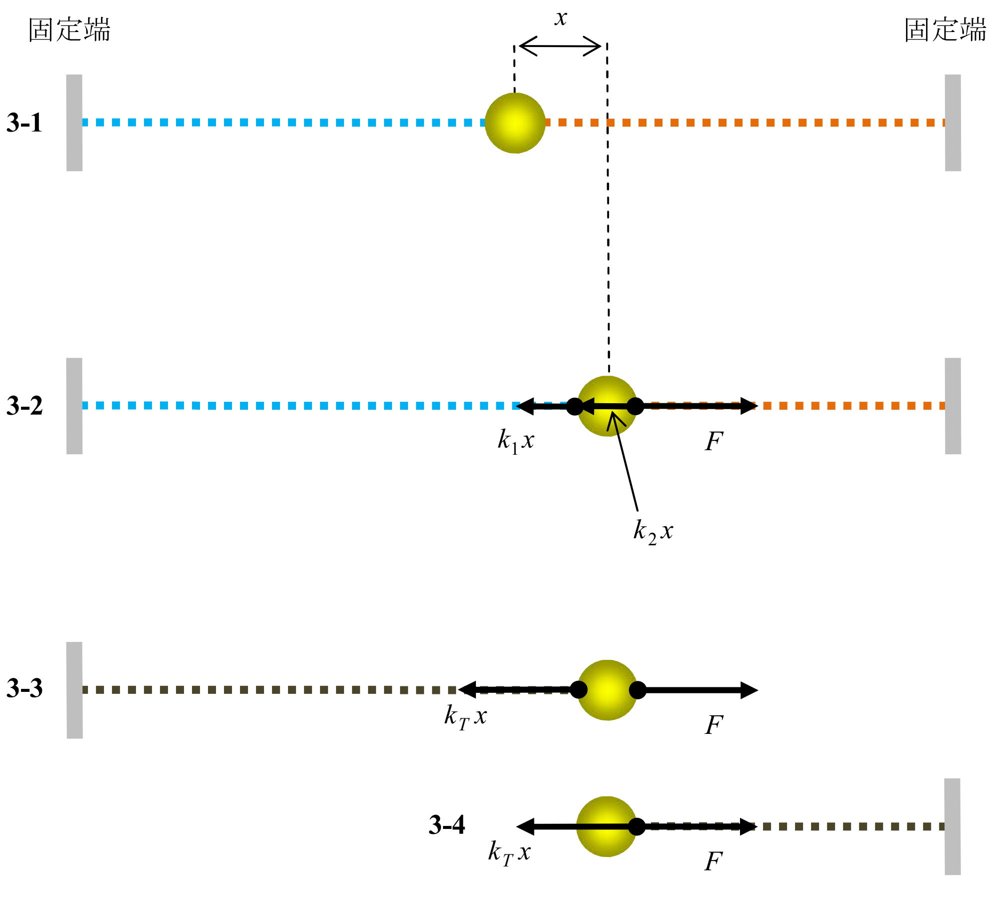


図 3

図 3-1 は単振動問題でよく見かけるタイプの図であるが，

図 3-3 あるいは図 3-4 のようにデフォルメするとわかりやすくなる。

110　直列ばね振り子

ばねを直列につないだときの合成ばね定数

ばね定数が k_1（青），k_2（茶），k_3（赤）のばねを直列につなぎ（図 1 上段），

大きさ F の外力で引くと，それぞれのばねの伸びが x_1，x_2，x_3 となって力がつり合ったとすると（図 1 中段），各接触点では作用反作用の力により力の大きさがつり合うから，

$F = k_3 x_3$，$k_3 x_3 = k_2 x_2$，$k_2 x_2 = k_1 x_1$，$k_1 x_1 = F'$ より，

$F = k_3 x_3 = k_2 x_2 = k_1 x_1 = F'$

よって，$x_1 = \dfrac{F}{k_1}$，$x_2 = \dfrac{F}{k_2}$，$x_3 = \dfrac{F}{k_3}$　・・・①

次に，これを 1 本のばねとみなし（図 1 下段），そのばね定数を k_T とすると，

ばねの伸びは $x_1 + x_2 + x_3$ だから，

$k_T(x_1 + x_2 + x_3) = F$ より，

$x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{F}{k_T}$　・・・②

①，②より，

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3} = \frac{F}{k_T}$$

よって，

$$\frac{1}{k_T} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$

これを一般化すると，

$$\frac{1}{k_T} = \sum_{i=1} \frac{1}{k_i}$$

とくに，ばね定数が同じばねを n 本直列につないだ場合，ばね定数を k とすると，

$\dfrac{1}{k_T} = \dfrac{n}{k}$ より，$k_T = \dfrac{k}{n}$

つまり，直列につなぐばねの数を $2,3,4,\cdots$ 本としていくと，

合成ばね定数 k_T は，$\dfrac{k}{2},\dfrac{k}{3},\dfrac{k}{4},\cdots$ と本数の逆数に比例して小さくなっていく。

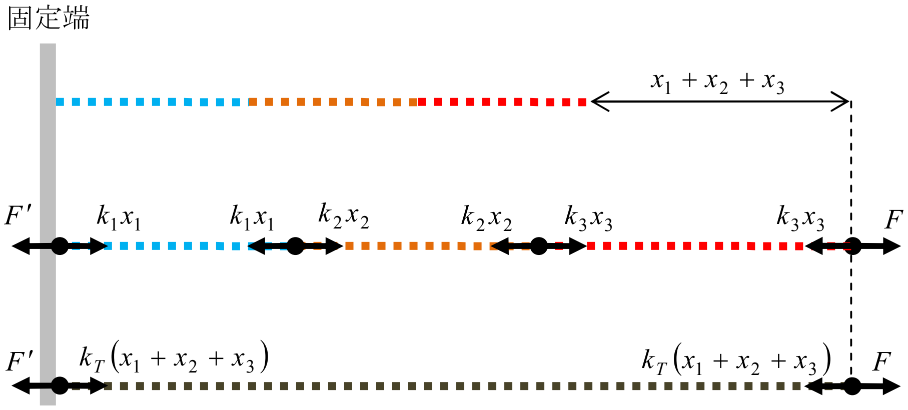

固定端
$x_1+x_2+x_3$
F'
k_1x_1
k_1x_1
k_2x_2
k_2x_2
k_3x_3
k_3x_3
F
F'
$k_T(x_1+x_2+x_3)$
$k_T(x_1+x_2+x_3)$
F

図 1

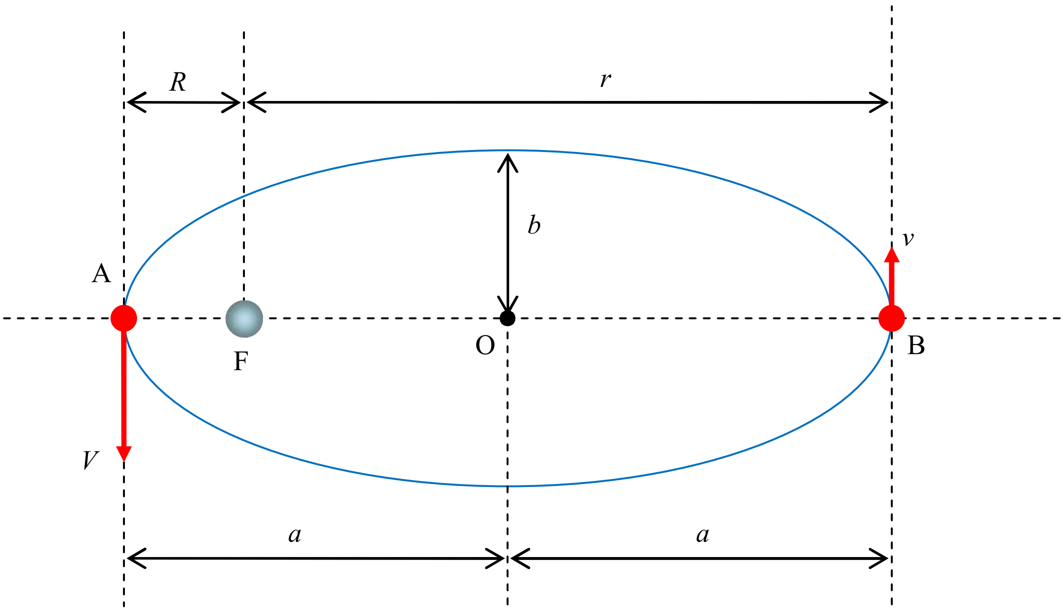
114　万有引力の法則からケプラーの第 **3** 法則を導く

補足

ケプラーの第 3 法則

同一質点のまわりを回るすべての天体は，その軌道に関係なく，$\dfrac{T^2}{a^3}$ ＝一定である。

証明



質量 M の質点 F のまわりを楕円軌道している質量 m の質点で考える。

質点 F は楕円軌道の焦点でもある。

また，質量 m の質点が A にあるときの速さを V，B にあるときの速さを v とする。

ケプラーの第 2 法則（面積速度一定の法則）より，

$$\frac{1}{2}VR=\frac{1}{2}vr$$

$$\therefore v=\frac{R}{r}V \quad \cdots ①$$

力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mV^2+\left(-\frac{GMm}{R}\right)=\frac{1}{2}mv^2+\left(-\frac{GMm}{r}\right)$$

$$\therefore V^2-\frac{2GM}{R}=v^2-\frac{2GM}{r} \quad \cdots ②$$

①を②に代入すると，

$$V^2-\frac{2GM}{R}=\frac{R^2}{r^2}V^2-\frac{2GM}{r}$$

$$V^2\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)=2GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)$$

$$V^2\left(1-\frac{R}{r}\right)\left(1+\frac{R}{r}\right)=\frac{2GM}{R}\left(1-\frac{R}{r}\right)$$

$$V^2\left(1+\frac{R}{r}\right)=\frac{2GM}{R}$$

$$V^2=\frac{2GMr}{R(R+r)}$$

$$\therefore V=\sqrt{\frac{2GMr}{R(R+r)}}$$

よって，

面積速度を h とすると， $h=\frac{1}{2}VR$ より，

$$h=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GMRr}{R+r}} \quad ・・・③$$

一方，楕円の性質から，

楕円の長軸半径 $a=\frac{R+r}{2}$ ・・・④

離心率 $e=\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{OA}-\mathrm{AF}}{\mathrm{OA}}=1-\frac{R}{a}$ ・・・⑤

④，⑤より，

$$e=1-\frac{R}{\frac{R+r}{2}}=1-\frac{2R}{R+r}=\frac{-R+r}{R+r} \quad ・・・⑥$$

楕円の短軸半径 $b=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OF}^2}$ ， $e=\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OA}}$ より，

$$b=\sqrt{\mathrm{OA}^2-e^2\mathrm{OA}^2}=a\sqrt{1-e^2}$$

これと④，⑥より，

$$b=\frac{R+r}{2}\sqrt{1-\left(\frac{-R+r}{R+r}\right)^2}=\frac{R+r}{2}\sqrt{\frac{4Rr}{(R+r)^2}}$$

$$\therefore b=\sqrt{Rr} \quad ・・・⑦$$

③に④，⑦を代入すると，

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2GMRr}{R+r}} = \frac{\sqrt{Rr}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2GM}{R+r}} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

ここで，

面積速度 h ×周期 T ＝楕円の面積 πab より，

$$T = \frac{\pi ab}{h} = \pi ab \cdot \frac{2}{b}\sqrt{\frac{a}{GM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\sqrt{a^3}$$

$$\therefore T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot a^3$$

$\dfrac{4\pi^2}{GM}$ は定数だから，

同一質点のまわりを回るすべての天体は，その軌道に関係なく，

$$\frac{T^2}{a^3} = 一定$$

である。

127

(1)

$x>0$ のとき弾性力は左向き（負），$x<0$ のとき弾性力は右向き（正）だから，弾性力は $-kx$

おもりが左向きに移動するとき，動摩擦力は右向き（正）だから，動摩擦力は μmg

よって，おもりに働くおもりの運動方向に平行な外力の和は $-kx+\mu mg$

ゆえに，運動方程式は $ma=-kx+\mu mg=-k\left(x-\dfrac{\mu mg}{k}\right)$ $\therefore a=-\dfrac{k}{m}\left(x-\dfrac{\mu mg}{k}\right)$

(3)

振動端点の中点は振動中心だから，$\dfrac{x_1+r}{2}=x_{\mathrm{c}}$

よって，$x_1=2x_{\mathrm{c}}-r=\dfrac{2\mu mg}{k}-r$

(4)

別解

単振動の運動方程式より，単振動の周期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ $\therefore t_1=\dfrac{T}{2}=\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

(5)

別解

振動端点における単振動運動の力学的エネルギー $=\dfrac{1}{2}k(r-x_{\mathrm{c}})^2+0=\dfrac{1}{2}k\left(r-\dfrac{\mu mg}{k}\right)^2+0$

振動中心における単振動運動の力学的エネルギー $=0+\dfrac{1}{2}mV^2$

単振動運動の力学的エネルギー保存則より，$\dfrac{1}{2}mV^2=\dfrac{1}{2}k\left(r-\dfrac{\mu mg}{k}\right)^2$

これと $r-\dfrac{\mu mg}{k}>0$ より，$V=\left(r-\dfrac{\mu mg}{k}\right)\sqrt{\dfrac{k}{m}}$