

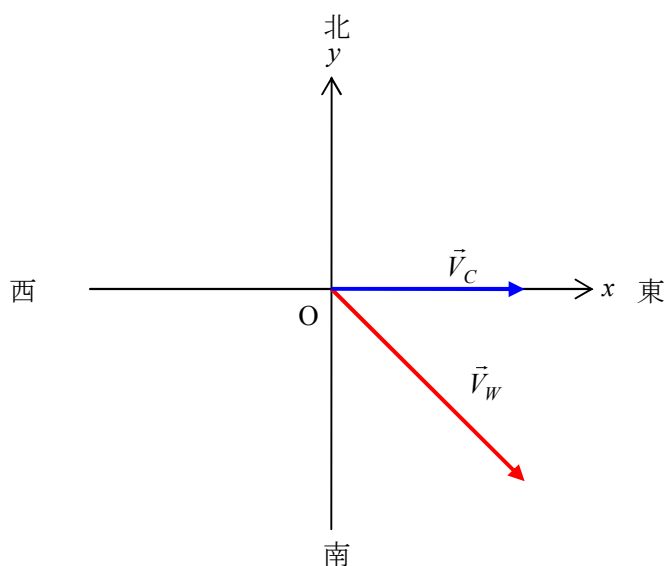
§1 物体の運動

2 相対速度

A から見た B とは A $\xrightarrow{\text{視線}}$ B ということで、ベクトルでいうところの $\overrightarrow{AB}$ である。

よって、定点を O とすると、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

5 自転車に乗っている人に対する風速



図のような座標系をとり、地面に対する風と自転車の速度をそれぞれ $\vec{V}_W$, $\vec{V}_C$, 地面に対する風速の x 成分を v_W ($v_W > 0$) とすると、

それぞれの速度を成分表示すると、 $\vec{V}_W = \begin{pmatrix} v_W \\ -v_W \end{pmatrix}$, $\vec{V}_C = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって、自転車から見た風速は、 $\vec{V}_W - \vec{V}_C = \begin{pmatrix} v_W - 10 \\ -v_W \end{pmatrix}$

自転車から見た風向きは真北、すなわち自転車から見た風速の x 成分が 0 だから、
 $v_W - 10 = 0 \quad \therefore v_W = 10$

これより自転車から見た風速の成分表示は、 $\vec{V}_W - \vec{V}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

よって、自転車に乗っている人は風速 10m/s の北風を感じる。

また、地面に対しては、 $\sqrt{10^2 + (-10)^2} = 10\sqrt{2}$ m/s の北西の風

9 一直線上を追いかける 2 物体の等加速度運動

A から見た B の加速度は $a_B - a_A$,

A が B に追いつくまでの A から見た B の変位は左向きに l だから $-l$

$$\text{よって, } -l = \frac{1}{2}(a_B - a_A)t^2 \quad \therefore t = \sqrt{\frac{2l}{a_A - a_B}}$$

補足

相対加速度・相対初速度・相対速度・相対変位の関係

同一直線上あるいは同一成分軸上において,

相対加速度を a_r , 相対初速度を v_{r0} , 相対速度を v_r , 相対変位を Δx_r とすると,

$$v_r = v_{r0} + a_r t, \quad \Delta x_r = v_{r0} t + \frac{1}{2} a_r t^2, \quad v_r^2 - v_{r0}^2 = 2 a_r \Delta x_r$$

10 一直線上を等加速度運動する 2 台の自動車の運動

ブレーキをかけはじめた瞬間の A から見た B の速度 $= 5 - 15 = -10 \text{ m/s}$

ブレーキをかけてからの A から見た B の加速度 $= 1 - (-4) = 5 \text{ m/s}^2$

ブレーキをかけはじめた瞬間からの A から見た B の位置の変化を Δx とする。

(1)

ブレーキをかけはじめた後の時間を t とすると, A から見た B の速度 $= -10 + 5t$

最も接近したときの A から見た B の速度は 0 だから, $-10 + 5t = 0$ より, $t = 2$

(2)

ブレーキをかけはじめた瞬間の A から見た B の速度 $= 5 - 15 = -10 \text{ m/s}$

最も接近したときの A から見た B の速度 $= 0$

ブレーキをかけてからの A から見た B の加速度 $= 5 \text{ m/s}^2$

ブレーキをかけはじめた瞬間から最接近までの A から見た B の位置の変化を ΔX とすると,

$$0^2 - (-10)^2 = 2 \cdot 5 \cdot \Delta X \quad \therefore \Delta X = -10$$

よって, 最接近するまで A から見て B は左方向に 10m 移動したことになる。

つまり, 10m 近づいたことになり, このときの両者の間隔は 0 だから,

ブレーキをかけはじめた瞬間の両者の距離は 10m である。

別解: (1)と(2)をまとめて解く

$$\text{A から見た B の位置の変化 } \Delta x = -10t + \frac{5}{2}t^2 = \frac{5}{2}(t-2)^2 - 10$$

よって, $t = 2$ のとき A から見た B の位置の変化が -10 m で最小になる。

つまり, ブレーキをかけはじめた瞬間から 2 秒後に

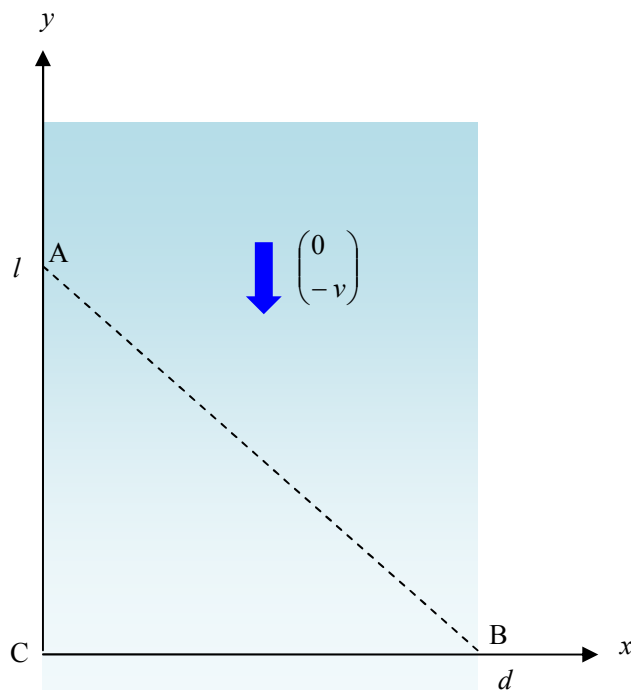
A から見て B は左方向に 10m 移動したことになる。

このときの両者の間隔は 0 だから,

ブレーキをかけはじめた瞬間の両者の距離は 10m である。

18 川を最小速度で横切る方法

別解



C を原点とする xy 直交座標を図のようにとり,

船の静水に対する速度を $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ とすると,

船の静水に対する速度と流速の合成速度は, $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y - v \end{pmatrix}$

このベクトルは $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -l \end{pmatrix}$ の向きだから, $\frac{v_x}{d} = -\frac{v_y - v}{l}$

よって, $lv_x = -d(v_y - v) \quad \therefore v_x = -\frac{d}{l}(v_y - v) \quad \cdots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} v_x^2 + v_y^2 &= \frac{d^2}{l^2}(v_y - v)^2 + v_y^2 \\ &= \frac{(l^2 + d^2)v_y^2 - 2d^2vv_y + d^2v^2}{l^2} \end{aligned}$$

分子を $f(v_y) = (l^2 + d^2)v_y^2 - 2d^2vv_y + d^2v^2$ とすると, $f'(v_y) = 2\{(l^2 + d^2)v_y - d^2v\}$ より,

$v_y = \frac{d^2}{l^2 + d^2}v \quad \cdots \textcircled{2}$ のとき, $f(v_y) = (l^2 + d^2)v_y^2 - 2d^2vv_y + d^2v^2$ は最小値

$f\left(\frac{d^2}{l^2 + d^2}\right) = (l^2 + d^2)\left(\frac{d^2}{l^2 + d^2}v\right)^2 - 2d^2v\left(\frac{d^2}{l^2 + d^2}v\right) + d^2v^2 = \frac{l^2d^2}{l^2 + d^2}v^2$ をとる。

よって、A から B に舟を進めるために必要な舟の静水に対する速さの最小値,

すなわち $\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ の最小値は, $v_x^2 + v_y^2 = \frac{f\left(\frac{d^2}{l^2 + d^2}\right)}{l^2} = \frac{d^2}{l^2 + d^2} v^2$ より,

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{d}{\sqrt{l^2 + d^2}} v \quad \dots \text{答(2)}$$

また, このときの船の速度は, ①, ②より, $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{l} \left(\frac{d^2}{l^2 + d^2} v - v \right) \\ \frac{d^2}{l^2 + d^2} v \end{pmatrix} = \frac{dv}{l^2 + d^2} \begin{pmatrix} l \\ d \end{pmatrix}$

これと $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{dv}{l^2 + d^2} \begin{pmatrix} l \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ -l \end{pmatrix} = 0$ より,

このときの船の速度の向きは, AB に垂直となる。 $\dots$ 答(1)